

Vektorverbände und messbare Funktionen

Heinrich von Weizsäcker

1973



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Vektorverbände und messbare Funktionen

Inauguraldissertation zur Erlangung
der Doktorwürde der Fakultät für Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von Heinrich von Weizsäcker im November 1972



1. Referent: Prof. H. Richter

2. Referent: Prof. W. Roelcke

Tag der mündlichen Prüfung: 27.2.1973

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	1
§0. Bezeichnungen und masstheoretische Hilfsmittel . .	5
§1. Vektorverbände	9
§2. Vektorverbände mit der Diagonaleigenschaft	17
§3. Lineare und sublineare Abbildungen	29
§4. Der Raum $M(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$	43
§5. Anwendungen auf vektorwertige Zufallsfunktionen	63
Literaturverzeichnis	81
Liste verwendeter Symbole	83
Stichwortverzeichnis	84

Zusammenfassung

Verschiedene Autoren (u.a. Kappos[12],[13], Krickeberg[15], Krengel[14]) haben ordnungstheoretische Methoden zur Behandlung mass- und wahrscheinlichkeitstheoretischer Konvergenzfragen verwendet. In der vorliegenden Arbeit sollen derartige Überlegungen konsequenter als bisher üblich in den Rahmen der modernen Theorie der Vektorverbände eingefügt werden.

Einerseits erhalten wir durch das Studium ursprünglich masstheoretisch motivierter Fragen neue Aussagen über grosse Klassen von Vektorverbänden, andererseits ergeben sich beim nachträglichen Spezialisieren einige Strukturaussagen über die üblichen linearen Räume von Äquivalenzklassen messbarer Funktionen und Verallgemeinerungen bekannter masstheoretischer Konvergenzsätze.

§ 0 und § 1 dienen der Vorbereitung. In § 2 und § 3 werden allgemeine Vektorverbände betrachtet, während wir in § 4 und § 5 masstheoretische Konsequenzen der vorher erzielten Ergebnisse untersuchen.

§ 2 behandelt Vektorverbände mit der Diagonaleigenschaft, und zwar insbesondere Eigenschaften der in ihnen stets erklärten Topologie der o^* -Konvergenz im Sinne von [18], Unter ziemlich allgemeinen Voraussetzungen wird gezeigt, dass diese eine lineare Topologie ist (2.10). In diesem Fall definiert sie stets einen "topologischen Vektorverband" (2.5). Ist der zugrundeliegende Vektorverband ausserdem σ -vollständig, so fällt sie mit der sogenannten "linearen Ordnungstopologie" zusammen (2.11).

§ 3 enthält als Hauptergebnis eine Verallgemeinerung des in der Theorie der Fast-Überall-Konvergenz wichtigen Satzes von Banach-Mazur-Orlicz (vgl. etwa [11], S.185f oder [9], S.332f). Ein einfache Version dieses Satzes lässt sich in die folgende ordnungstheoretische Form bringen:

Sei $(\Omega, \mathfrak{R}, \mu)$ ein endlicher Massraum und $M(\mu)$ der Vektorverband der μ -Äquivalenzklassen $\mathfrak{R}$ -messbarer reellwertiger Funktionen auf Ω , versehen mit der Topologie der Konvergenz nach Mass μ . $(E, \|\cdot\|)$ sei ein Banachraum und $(T_n)_n$ eine Folge stetiger linearer Abbildungen von E in $M(\mu)$. Dann gilt:

a) Ist für jedes e aus E die Menge $\{T_n e\}_n$ ordnungsbeschränkt in $M(\mu)$, so ist die Abbildung $e \mapsto \sup\{|T_n e|\}_n$ stetig.

b) Wenn die Abbildung $e \mapsto \sup\{|T_n e|\}_n$ stetig ist, dann ist die Menge

$\{ e \in E : (T_n e)_n \text{ ist ordnungskonvergent in } M(\mu) \}$ abgeschlossen in E .

Wir zeigen, dass diese Aussagen für beliebige Netze $(T_\gamma)_\Gamma$ und unter sehr viel schwächeren Voraussetzungen über Definitionsbereich und Bildraum gültig bleiben (vgl. 3.12 für Teil b) und 3.15 für Teil a)). Der Vorbereitung dienen einige auch für sich interessante Resultate über sublineare Abbildungen mit Werten in Vektorverbänden, u.a. ein Analogon zum Satz von Banach-Steinhaus (3.13). Die Beweise ergeben sich überall durch einfache Modifikation der klassischen Argumente. - Als Anwendung wird bewiesen: Für einen L-Raum E ist jede Teilmenge von $\mathcal{L}(E, E)$, welche punktweise ordnungsbeschränkt ist, auch ordnungsbeschränkt in dem Vektorverband $\mathcal{L}(E, E)$ (3.16).

In § 2 und § 3 stellen wir im Interesse der masstheoretischen Anwendungen an die beteiligten linearen Topologien keine Konvexitätsforderungen (mit Ausnahme des eben formulierten Satzes über L-Räume).

§ 4 ist der Strukturtheorie des oben definierten Raumes $M(\mu)$ gewidmet. Bekanntlich fallen hier bei $\mu(\Omega) < \infty$ Konvergenz nach Mass μ und o^* -Konvergenz zusammen, so dass die Ergebnisse des § 2 übertragen werden können. Es wird gezeigt, dass sich auch im nicht- σ -endlichen Fall entsprechende Aussagen beweisen lassen. Wir geben eine (für Folgenräume durch Peressini [18] bewiesene) Charakterisierung der ordnungsbeschränkten Mengen in Köthe-Funktionen-Räumen (4.13), welche es gestattet, u.a. ein Ergebnis von Norton Starr [20] über lineare Abbildungen zwischen L^p -Räumen zu verallgemeinern (4.14). Dass für $\mu(\Omega) < \infty$ $M(\mu)$ mit der Topologie der Konvergenz nach Mass μ der topologische induktive Limes der Räume $(L^1(\nu), \|\cdot\|_1)$ mit $\mu \sim \nu$ ist (4.15), verwenden wir zum Nachweis einer Konvexitätseigenschaft von $M(\mu)$, welche unter den Banach-Verbänden die L-Räume auszeichnet (4.19 und 4.20).

In § 5 bringen wir Anwendungen der Ergebnisse von § 3 und § 4 auf kontinuierliche Zufallsfunktionen mit Werten in Banachräumen. Insbesondere erhalten wir eine zu dem klassischen Resultat von Doob analoge Separabilitätsaussage (5.10), welche es in vielen Fällen (z.B. bei Martingalen) ermöglicht, Einblick in das Pfadverhalten dieser Zufallsfunktionen zu gewinnen.

Ich möchte an dieser Stelle allen, die das Zustandekommen dieser Arbeit ermöglicht haben, meinen Dank aussprechen, insbesondere Herrn Dr. K. Pilzwegger und vor allem Herrn Prof. H. Richter für eine Reihe von Ratschlägen bei der endgültigen Formulierung, ausserdem Herrn Dr. H. Pfister für einige Unterhaltungen über die Themen der §§ 2 und 4 sowie für seine freundliche Erlaubnis, Satz 4.16 zu verwenden.

Ein Symbol- und ein Stichwortverzeichnis befinden sich am Ende der Arbeit.

§0. Bezeichnungen und masstheoretische Hilfsmittel

0.1 Seien A, A', Z Mengen mit $A' \subset A$ und $f: \alpha \mapsto z_\alpha$ eine Abbildung von A in Z . Wir unterscheiden:

a) Die Familie $(z_\alpha)_A$ als eine andere Schreibweise für f .

b) Die Menge $\{z_\alpha\}_A$ als die Menge der Werte von $(z_\alpha)_A$.

Im Fall $A = \mathbb{N}$ schreiben wir auch $(z_n)_n$ statt $(z_n)_{\mathbb{N}}$.

Die Einschränkung von f auf A' bezeichnen wir mit $f|_{A'}$.

$(\Gamma, \langle \rangle)$ bezeichnet stets eine nicht leere (nach rechts) gerichtete Indexmenge. Eine Familie $(z_\gamma)_\Gamma$ nennen wir ein Netz.

0.2 Vektorräume verstehen sich stets über dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. $\mathbb{R}$ ist mit der gewöhnlichen Topologie versehen. Sei E ein Vektorraum. Für $B \subset E$ sei $C_1(B)$ die konvexe Hülle von B . Für $B \subset E, H \subset E$ sei $B + H := \{b + h : b \in B, h \in H\}$. Der Nullvektor von E wird mit σ_E oder, falls Verwechslungen ausgeschlossen sind, mit σ bezeichnet.

0.3 Sei $(\Omega, \mathfrak{R})$ ein Messraum und (Z, τ) ein topologischer Raum. Wir nennen eine Abbildung $f: \Omega \rightarrow Z$ $\mathfrak{R}$ -messbar oder einfach messbar, wenn $f^{-1}(U) \in \mathfrak{R}$ ist für alle τ -offenen $U \subset Z$.

0.4 (Separable Familien messbarer Funktionen). Sei Ω eine Menge und (Z, τ) ein topologischer Raum. Sei $R \subset \mathbb{R}$. Eine Familie $(f_r)_R$ von $\mathfrak{R}$ -messbaren Abbildungen von Ω in Z heisst separabel, falls eine abzählbare Teilmenge Q von R existiert mit

$$\bigcap_{r \in I} f_r^{-1}(A) = \bigcap_{r \in I \cap Q} f_r^{-1}(A)$$

für alle τ -abgeschlossenen A in Z und alle (relativ-) offenen I in R . Q heisst in diesem Fall Separator von $(f_r)_R$.

Ein nützliches Kriterium für Separabilität ist durch das folgende, unmittelbar einsichtige Lemma gegeben:

0.4L $(f_r)_R$ ist genau dann separabel mit Separator Q , wenn für jedes ω aus Ω der Graph $\{(q, f_q(\omega))\}_Q$ bezüglich der Produkttopologie von $R \times Z$ dicht liegt in $\{(r, f_r(\omega))\}_R$.

Wichtig ist der folgende

0.4S Satz: (Doob) Sei $\mu|_R$ ein Mass mit $\mu(\Omega) < \infty$. (Z, τ) sei kompakt und metrisierbar. Dann existiert zu jeder Familie $(f_r)_R$ von messbaren Abbildungen von Ω in Z eine Familie $(\tilde{f}_r)_R$ von messbaren Abbildungen von Ω in Z mit

- a) $(\tilde{f}_r)_R$ ist separabel,
- b) $\mu(\{\omega : f_r(\omega) \neq \tilde{f}_r(\omega)\}) = 0$ für jedes r aus R .

Bemerkung: Ein wichtiger Spezialfall für Z ist $Z = \tilde{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$. Für einen Beweis des Satzes vgl. [1], S.14ff. Allerdings wird dort ausser im Fall $Z = \tilde{\mathbb{R}}$ vorausgesetzt, dass das Mass $\mu|_R$ vollständig ist. Von dieser Einschränkung kann man sich jedoch durch folgende Überlegung befreien:

Sei (Z, τ) kompakt und metrisierbar. Dann existiert eine surjektive Abbildung $\varphi: D \rightarrow Z$, wobei φ stetig und D das (kom-
pakte) Cantorsche Diskontinuum ist. Durch $\pi(z) := \inf \varphi^{-1}(\{z\})$ ist wegen der Stetigkeit von φ eine Abbildung $\pi: Z \rightarrow D$ definiert mit $\varphi \circ \pi = \text{id}_Z$. π ist Borelsch, da für $a \geq 0$

$$\{z \in Z : \pi(z) > a\} = \{z \in Z : \varphi(b) \neq z \ \forall \ b \in D_n[0, a]\}$$

$$= Z - \varphi(D_n[0, a])$$

offen ist. Sei nun $(f_r)_R$ wie im Satz gegeben. Da π Borelsch ist,

ist $(\pi \circ f_r)_R$ eine Familie D-wertiger messbarer Funktionen. Der Beweisteil in [1], S.19, wo gezeigt wird, dass die Voraussetzung " $\mu|_R$ ist vollständig" im Fall $Z = \tilde{\mathbb{R}}$ weggelassen werden kann, lässt sich wörtlich auf den Fall $Z = D$ übertragen. Also existiert eine separable Familie $(g_r)_R$ D-wertiger messbarer Funktionen mit $\mu(\{\omega: g_r(\omega) \neq \pi(f_r(\omega))\}) = 0$ für $r \in R$. Wir setzen $\tilde{f}_r := \varphi \circ g_r$. Dann ist auch $(\tilde{f}_r)_R$ separabel, weil φ stetig ist. Ausserdem gilt wegen $\varphi \circ \pi = \text{id}_Z$ für alle r :

$$\begin{aligned} \mu(\{\omega: \tilde{f}_r(\omega) \neq f_r(\omega)\}) &= \mu(\{\omega: \varphi(g_r(\omega)) \neq \varphi(\pi(f_r(\omega)))\}) \\ &\leq \mu(\{\omega: g_r(\omega) \neq \pi(f_r(\omega))\}) = 0. \end{aligned}$$

0.5 (Eigenschaften des Bochner-Integrals, vgl. [3])

Sei $(\Omega, \mathcal{R}, \mu)$ ein Massraum und $(F, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. $\mathcal{L}_F^1(\mu)$ sei der Raum der F-wertigen Bochner-integrierbaren Funktionen auf $(\Omega, \mathcal{R}, \mu)$. Dann definiert $\|f\|_1 := \int_{\Omega} \|f(\omega)\| d\mu$ eine vollständige Halbnorm auf $\mathcal{L}_F^1(\mu)$. $(\mathcal{L}_F^1(\mu), \|\cdot\|_1)$ bezeichnet den zugehörigen Banachraum. (Im Fall $F = \mathbb{R}$ schreiben wir wie üblich einfach $\mathcal{L}^1(\mu)$ und $L^1(\mu)$.) Als für uns wichtig halten wir fest:

- Jedes $f \in \mathcal{L}_F^1(\mu)$ nimmt nur Werte in einem geeigneten separablen Teilraum von F an.
- Die f mit einem (von f abhängigen) endlich-dimensionalen Wertebereich liegen dicht in $\mathcal{L}_F^1(\mu)$.
- Ist $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und $x \in F$, so gilt für $f(\omega) = g(\omega) \cdot x$, dass $f \in \mathcal{L}_F^1(\mu)$ mit $\int_{\Omega} f d\mu = (\int_{\Omega} g d\mu) \cdot x$ ist.
- Für $f \in \mathcal{L}_F^1(\mu)$ gilt

$$\left\| \int_{\Omega} f d\mu \right\| \leq \int_{\Omega} \|f\| d\mu.$$

0.6 (Bedingte Erwartungen und Martingale)

1. Sei $(\Omega, \mathcal{R}, \mu)$ ein Massraum mit $\mu(\Omega) < \infty$ und $\mathcal{G}$ eine σ -Algebra über Ω mit $\mathcal{G} \subset \mathcal{R}$. Es sei $(F, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $f \in \mathcal{L}_F^1(\mu)$. Eine $\mathcal{G}$ -messbare Funktion $g: \Omega \rightarrow F$ heisst (Version der) bedingte(n) Erwartung von f (unter der Bedingung $\mathcal{G}$), falls

a) $g \in \mathcal{L}_F^1(\mu)$,

b) für alle $G \in \mathcal{G}$ $\int_G f \, d\mu = \int_G g \, d\mu$ ist.

Man schreibt in diesem Fall $g \in E(f|\mathcal{G})$. g ist durch a) und b) bis auf $\mathcal{G}$ -Nullmengen eindeutig bestimmt.

2. Ein Netz $((f_\gamma, \mathcal{R}_\gamma))_\Gamma$ heisst Martingal, falls

i) Jedes $\mathcal{R}_\gamma$ σ -Algebra über Ω ist mit $\mathcal{R}_\gamma \subset \mathcal{R}$,

ii) $\gamma_1 \in \Gamma, \gamma_2 \in \Gamma, \gamma_1 < \gamma_2 \implies \mathcal{R}_{\gamma_1} \subset \mathcal{R}_{\gamma_2}$,

iii) $\gamma_1 \in \Gamma, \gamma_2 \in \Gamma, \gamma_1 < \gamma_2 \implies f_{\gamma_1} \in E(f_{\gamma_2} | \mathcal{R}_{\gamma_1})$.

3. Im Fall $F = \mathbb{R}$ heisst ein Netz $((f_\gamma, \mathcal{R}_\gamma))$ Submartingal, falls i) und ii) gelten, aber iii) ersetzt ist durch

iii') $\gamma_1 \in \Gamma, \gamma_2 \in \Gamma, \gamma_1 < \gamma_2 \implies$

f_{γ_1} ist $\mathcal{R}_{\gamma_1}$ -messbar mit $f_{\gamma_1} \leq g$ für ein $g \in E(f_{\gamma_2} | \mathcal{R}_{\gamma_1})$.

Für uns wichtig wird das folgende

0.6L Lemma: (Doob [8], S.314, Th. 3.2) Sei $\Gamma = \{1, \dots, n\}$ mit der natürlichen Ordnung versehen, $((f_i, \mathcal{R}_i))_\Gamma$ ein Submartingal und für $s \in \mathbb{R}$

$$\Omega_s := \{ \omega : \max_{\Gamma} f_i(\omega) \geq s \}.$$

Dann gilt

$$s \cdot \mu(\Omega_s) \leq \int_{\Omega_s} f_n \, d\mu \leq \int_{\Omega} |f_n| \, d\mu$$

§ 1. Vektorverbände

In diesem Paragraphen werden einige Eigenschaften von Vektorverbänden zusammengestellt, welche für das Weitere wichtig sind. Dabei handelt es sich, meines Wissens mit Ausnahme von 1.19, um bekannte Aussagen.

1.1 Definition: Ein Vektorverband X ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, der mit einer Verbandsstruktur versehen ist, so dass für die dadurch induzierte Ordnung $\leq$ gilt:

$$(VV1) \quad x \in X, y \in X, z \in X, \quad x \leq y \implies x + z \leq y + z$$

$$(VV2) \quad x \in X, y \in X, 0 < a \in \mathbb{R} \implies [x \leq y \implies ax \leq ay] \quad .$$

Die Verbandsoperationen bezeichnen wir mit $\wedge$ und $\vee$ und schreiben x^+ statt $x \vee 0$, x^- statt $-x \vee 0$ und $|x|$ statt $x \vee (-x)$. Die Menge $X^+ := \{x \in X : 0 \leq x\}$ heisst der positive Kegel von X .

Bemerkung: Wegen $x \leq y \iff y - x \in X^+$ ist die Ordnung $\leq$ durch X^+ eindeutig bestimmt.

1.2 Lemma: Sei X ein Vektorverband.

a) Für $x \in X$, $y \in X$ gelten die Beziehungen

$$x = x^+ - x^-, \quad |x| = x^+ + x^- = x^+ \vee x^-, \quad x \wedge y = -((-x) \vee (-y)),$$

$$x + y = x \wedge y + x \vee y, \quad |x + y| \leq |x| + |y|,$$

$$|ax| = |a| |x| \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}.$$

b) Jede der beiden Beziehungen

$$\sup(B + H) = \sup B + \sup H$$

$$\inf(B + H) = \inf B + \inf H$$

ist für alle Teilmengen B, H von X erfüllt, für welche die rechts vorkommenden Suprema (bzw. Infima) existieren.

Beweis: Für a) vgl. [18], S.5f, für b) vgl.[19], S. 206.

1.3 Zerlegungslemma: Sei X ein Vektorverband. $x_1, \dots, x_n$ und

$y_1, \dots, y_m$ seien in X^+ , so dass

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{j=1}^m y_j .$$

Dann kann man $z_{ij} \in X^+$ ($i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$) aus den x_i, y_j so konstruieren, dass

$$\begin{aligned} x_i &= \sum_{j=1}^m z_{ij} & (i = 1, \dots, n) \\ y_j &= \sum_{i=1}^n z_{ij} & (j = 1, \dots, m) . \end{aligned}$$

Beweis: vgl. [18], S. 7.

1.4 Definition: Ein Vektorverband X heisst ordnungsseparabel

(o-separabel), wenn jede Teilmenge B von X , für welche $\sup B$ existiert, eine abzählbare Teilmenge B' besitzt mit

$$\sup B = \sup B' .$$

1.5 Definition: Ein Vektorverband X heisst ordnungsvollständig

[σ -vollständig], falls jede [abzählbare] nach oben beschränkte Teilmenge von X ein Supremum besitzt.

1.6 Definition: Ein Vektorverband X heisst Archimedisch, falls aus

$x \in X^+$, $y \in X$, $ax \geq y$ für alle $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$

stets folgt, dass $y \leq 0$.

Bekannt (vgl. z.B. [18], S. 8 unten) ist

1.7 Lemma: Jeder σ -vollständige Vektorverband ist Archimedisch.

Zur Illustration einige Beispiele:

1. X nicht Archimedisch: $X = \mathbb{R}^2$ mit der lexikographischen Ordnung.
2. X Archimedisch, aber nicht σ -vollständig: $X = C([0,1])$ (stetige reelle Funktionen auf dem Einheitsintervall) mit der üblichen Ordnung.
3. X σ -vollständig, aber nicht ordnungsvollständig: $X = \mathcal{L}^1([0,1])$ mit der üblichen Ordnung.
4. X ordnungsvollständig: $X = \mathbb{R}^I$ mit der „kanonischen“ Ordnung. (vgl. die nächste Definition)

1.8 Definition: Sei $(X_i)_I$ eine Familie von Vektorverbänden ($I \neq \emptyset$). Die auf dem Produktraum $X = \prod_I X_i$ durch $X^+ := \{ (x_i)_I : x_i \in X_i^+ \forall i \in I \}$ definierte Ordnung nennen wir die kanonische Ordnung auf X .

1.9 Definition: a) Seien x, y Elemente eines Vektorverbandes X mit $x \leq y$. Die Menge $\{ z \in X : x \leq z \leq y \}$ heisst das Ordnungsintervall von x nach y und wird mit $[x, y]$ bezeichnet.

b) Eine Teilmenge B eines Vektorraumes X heisst ordnungskonvex (o-konvex), falls für $x \in B, y \in B$ mit $x \leq y$ stets $[x, y] \subset B$ ist.

c) Eine Teilmenge B eines Vektorverbandes X heisst ordnungsbeschränkt (o-beschränkt), falls ein $x \in X^+$ existiert mit $B \subset [-x, x]$.

1.10 Definition: a) Ein Netz $(y_\gamma)_\Gamma$ in einem Vektorverband X konvergiert monoton fallend (bzw. wachsend) gegen y in X , falls

$$y = \inf \{ y_\gamma \}_\Gamma \text{ und } y_{\gamma_1} \leq y_{\gamma_2} \text{ für } \gamma_1 > \gamma_2 \quad (\text{ bzw. } y = \sup \{ y_\gamma \}_\Gamma \text{ und } y_{\gamma_1} \geq y_{\gamma_2} \text{ für } \gamma_1 > \gamma_2) .$$

In diesem Fall schreiben wir : $y_\gamma \downarrow_\Gamma y$ (bzw. $y_\gamma \uparrow_\Gamma y$).

b) Ein (nicht notwendig monoton) Netz $(x_\gamma)_\Gamma$ heisst ordnungskonvergent (o-konvergent) gegen x in X , falls

- i) die Menge $\{x_\gamma\}_\Gamma$ o-beschränkt ist in X ,
- ii) ein Netz $(y_\gamma)_\Gamma$ in X existiert mit $y_\gamma \downarrow_\Gamma \emptyset$ und

$$|x_\gamma - x| \leq y_\gamma \quad \text{für alle } \gamma \in \Gamma.$$

In diesem Fall schreiben wir $x_\gamma \xrightarrow[\Gamma]{o} x$.

Bemerkung: Ist $(\Gamma, <) = (\mathbb{N}, <)$, so schreiben wir auch $x_n \xrightarrow[n]{o} x$. Dabei folgt dann die Bedingung i) aus ii) und ist daher entbehrlich.

Nützlich ist das folgende einfache Lemma:

1.11 Lemma: Seien $(x_\gamma)_\Gamma$ und $(y_\gamma)_\Gamma$ Netze in dem Vektorverband X mit $x_\gamma \xrightarrow[\Gamma]{o} x$ und $y_\gamma \xrightarrow[\Gamma]{o} y$. Dann gilt:

- a) $ax_\gamma + by_\gamma \xrightarrow[\Gamma]{o} ax + by$ für alle $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$,
- b) $x \leq y$, falls $x_\gamma \leq y_\gamma$ für alle $\gamma \in \Gamma$.

1.12 Definition: Eine Folge $(x_n)_n$ in einem Vektorverband X heisst relativ gleichmässig konvergent gegen x in X (in Zeichen: $x_n \xrightarrow[n]{rg} x$), falls ein $z \in X^+$ und eine Nullfolge $(a_n)_n$ positiver reeller Zahlen existiert mit

$$|x_n - x| \leq a_n z \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

1.13 Lemma: In einem Archimedischen Vektorverband gilt

$$x_n \xrightarrow[n]{rg} x \implies x_n \xrightarrow[n]{o} x.$$

Bemerkung: In gewissen Vektorverbänden gilt hiervon auch die Umkehrung (vgl. 2.3).

1.14 Definition: τ sei eine lineare Topologie auf dem Vektorverband X .

Der positive Kegel X^+ heisst τ -normal, falls eine τ -Nullumgebungs-basis aus o -konvexen Mengen existiert.

Über den Zusammenhang zwischen o -Konvergenz und topologischer Konvergenz gilt das

1.15 Lemma: X sei ein Vektorverband, τ eine lineare Topologie auf X mit τ -normalem X^+ .

a) X sei o -separabel mit $y_n \downarrow_n \sigma \implies \sigma = \tau\text{-}\lim_n y_n$ für alle Folgen $(y_n)_n$ in X . Dann gilt für alle Netze $(x_\gamma)_\Gamma$ in X :

$$x_\gamma \xrightarrow[\Gamma]{o} x \implies x = \tau\text{-}\lim_\Gamma x_\gamma.$$

b) X^+ sei τ -abgeschlossen. Dann gilt für alle monotonen Netze $(x_\gamma)_\Gamma$ in X :

$$x = \tau\text{-}\lim_\Gamma x_\gamma \implies x_\gamma \downarrow_\Gamma x \text{ bzw. } x_\gamma \uparrow_\Gamma x.$$

Beweis: a) Sei $(x_\gamma)_\Gamma$ ein Netz in X mit $x_\gamma \xrightarrow[\Gamma]{o} x$. Dann gibt es ein monoton fallendes Netz $(y_\gamma)_\Gamma$ mit $\sigma = \inf\{y_\gamma\}_\Gamma$ und

$$(+)\quad \sigma \leq (x - x_\gamma)^+ + (x - x_\gamma)^- = |x - x_\gamma| \leq y_\gamma$$

für alle $\gamma \in \Gamma$. Da X ordnungsseparabel ist, existiert eine abzählbare Teilmenge $\{\gamma_n\}_n$ von Γ mit $\sigma = \inf\{y_{\gamma_n}\}_n$. Wir wählen γ'_n so,

dass $\gamma_1 < \gamma'_n$ für $i = 1, \dots, n$ und $\gamma'_n < \gamma'_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen der Monotonie von $(y_\gamma)_\Gamma$ gilt $y_{\gamma'_n} \downarrow_n \sigma$, also nach Voraussetzung

$\sigma = \tau\text{-}\lim_n y_{\gamma'_n}$. Dann ist überhaupt $\sigma = \tau\text{-}\lim_\Gamma y_\gamma$. Denn sei W eine

o -konvexe Nullumgebung. Zu W gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $y_{\gamma'_n} \in W$, für alle γ mit $\gamma > \gamma'_n$ ist dann $\sigma \leq y_\gamma \leq y_{\gamma'_n}$ und damit $y_\gamma \in W$.

Aus (+) folgen hieraus $\sigma = \tau\text{-}\lim_{\Gamma} (x - x_{\gamma})^{+}$ und $\sigma = \tau\text{-}\lim_{\Gamma} (x - x_{\gamma})^{-}$,
also $\sigma = \tau\text{-}\lim_{\Gamma} ((x - x_{\gamma})^{+} - (x - x_{\gamma})^{-})$ und damit $x = \tau\text{-}\lim_{\Gamma} x_{\gamma}$.

b) vgl. ([18], S. 91, Cor. 3.2). |

Bemerkung: Die masstheoretischen L^p -Räume sind o-separabel. 1.15a liefert daher eine (bekannte) Verallgemeinerung des Satzes von der majorisierten Konvergenz.

1.16 Lemma: Sei (X, τ) ein Vektorverband mit τ -normalem X^{+} . Dann ist jede o-beschränkte Teilmenge von X auch τ -beschränkt.

Beweis: vgl. ([18], S. 61, prop. 1.4). |

Umgekehrt sind Kriterien dafür wichtig, wann eine vorgegebene Menge o-beschränkt ist:

1.17 Definition: Man sagt, dass ein Vektorverband die Eigenschaft o- $\mathfrak{B}$ (Beschränktheitseigenschaft) habe, wenn jede Teilmenge B von X o-beschränkt ist, für welche gilt: Für alle Folgen $(x_n)_n$ in B und alle Nullfolgen $(a_n)_n$ in $\mathbb{R}$ ist $a_n x_n \xrightarrow{o} \sigma$.

1.18 Definition: Man sagt, dass ein Vektorverband X mit der linearen Topologie τ die Eigenschaft τ - $\mathfrak{B}$ (topologische Beschränktheitseigenschaft) habe, wenn jede (bzgl. $\leq$) nach oben gerichtete, τ -beschränkte Teilmenge von X nach oben o-beschränkt ist.

Bemerkung: In [7] heisst X in diesem Fall 'monotone bounded'.

1.19 Lemma: X sei ein Vektorverband, τ eine lineare Topologie auf X mit τ -normalem X^{+} . Aus $y_n \downarrow_n \sigma$ folge $\sigma = \tau\text{-}\lim y_n$. Hat X dann die Eigenschaft τ - $\mathfrak{B}$, so auch o- $\mathfrak{B}$.

Beweis: Sei $B \subset X$ so, dass $a_n x_n \xrightarrow{0} 0$ für jede Folge $(x_n)_n$ in B und jede Nullfolge $(a_n)_n$ in $\mathbb{R}$. Wir haben zu zeigen, dass B o -beschränkt ist. Sei hierzu

$$\hat{B} := \{ |b_1| \vee \dots \vee |b_j| : j \in \mathbb{N}, b_1 \in B \text{ für } 1 = 1, \dots, j \}$$

$\hat{B}$ ist nach oben gerichtet und für jede obere Schranke z von $\hat{B}$ gilt $B \subset [-z, z]$. Um die Existenz eines solchen z nachzuweisen, genügt wegen τ - B nach Def. 1.18 der Nachweis der τ -Beschränktheit von $\hat{B}$.

Wäre $\hat{B}$ nicht τ -beschränkt, so gäbe es eine τ -Nullumgebung W und eine Folge $(x_n)_n$ in $\hat{B}$, so dass $\frac{1}{n}x_n \notin W$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dabei können wir voraussetzen, dass W o -konvex ist, weil X^+ τ -normal ist. Zu der Folge $(x_n)_n$ gibt es eine Dreiecksfolge $(b_{(n,k)})_{1 \leq k \leq n}$ in B mit $x_n = |b_{(n,1)}| \vee \dots \vee |b_{(n,k_n)}|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es sei $A := \{ (n,k) : 1 \leq k \leq k_n \}$ lexikographisch geordnet. Dann hat A den Ordnungstyp von $\mathbb{N}$ und gemäss der Voraussetzung über B gilt $\frac{1}{n}b_{(n,k)} \xrightarrow{0} 0$. Also existieren $y_{(n,k)}$ ($(n,k) \in A$) in X mit $y_{(n,k)} \downarrow_A 0$ und $\frac{1}{n}|b_{(n,k)}| \leq y_{(n,k)}$ für alle $(n,k) \in A$. Es folgt $\frac{x_n}{n} \leq y_{(n,1)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, was wegen $y_{(n,1)} \in W$ für genügend grosse n (vgl. die Voraussetzung) der Annahme $\frac{x_n}{n} \notin W$ widerspricht. |

1.20 Definition: Eine Teilmenge B eines Vektorverbandes heisst solid, falls mit $y \in B$ auch stets $[-|y|, |y|] \subset B$ ist.

1.21 Definition: Sei X ein Vektorverband, τ eine lineare Topologie auf X . (X, τ) heisst topologischer Vektorverband, wenn eine τ -Nullumgebungsbasis aus soliden Mengen existiert.

1.22 Lemma: X sei ein Vektorverband, τ eine lineare Topologie auf X .

- a) (X, τ) ist genau dann ein topologischer Vektorverband, wenn X^+ τ -normal ist und die Verbandsoperationen simultan in beiden Variablen stetig sind.
- b) Ist (X, τ) ein topologischer Vektorverband, so ist X^+ τ -abgeschlossen.

Beweis: Für a) vgl. ([18], S. 104, prop. 4.7). b) folgt direkt aus a).|

1.23 Definition: Sei X ein Vektorverband.

- a) Die feinste lineare Topologie auf X , bezüglich welcher alle o -beschränkten Teilmengen von X beschränkt sind, heisst die lineare Ordnungstopologie von X .
- b) Die feinste lokalkonvexe (lineare) Topologie auf X , bezüglich welcher alle o -beschränkten Teilmengen von X beschränkt sind, heisst die konvexe Ordnungstopologie von X .

Bemerkung: In der Literatur wurde bisher nur die konvexe Ordnungstopologie betrachtet. Im nächsten § werden wir jedoch sehen, dass in vielen Fällen die lineare Ordnungstopologie die „natürliche“ Topologie ist (vgl. 2.11).

§ 2. Vektorverbände mit der Diagonaleigenschaft

2.1 Definition: Sei X ein Vektorverband. Eine Folge $(x_n)_n$ in X heisst o^* -konvergent gegen x in X , falls jede Teilfolge $(x_{n_k})_k$ eine Unterfolge $(x_{n_{k_l}})_l$ hat, welche o -konvergent gegen x ist.

Wir schreiben $x_n \xrightarrow{o^*} x$.

2.2 Definition: Man sagt, ein Vektorverband X habe die Diagonaleigenschaft, wenn folgendes gilt: Seien $(x_{nm})_{n,m}$ eine Doppelfolge in X , $(y_n)_n$ eine Folge in X und y aus X so, dass

- i) Für jedes n gilt $x_{nm} \xrightarrow{o} y_n$
- ii) Es gilt $y_n \xrightarrow{o} y$.

Dann gibt es eine streng wachsende Folge $(m_n)_n$ von natürlichen Zahlen mit $x_{nm_n} \xrightarrow{o} y$.

2.3 Lemma: In einem σ -vollständigen Vektorverband mit der Diagonaleigenschaft sind relativ gleichmässige Konvergenz und Ordnungskonvergenz für Folgen äquivalent.

Beweis: vgl. ([18], S. 49, prop. 5.9). |

2.4 Satz: Sei X ein Vektorverband mit der Diagonaleigenschaft.

Zu dem durch

$$\bar{A} := \{ x \in X : \text{es ex. } (x_n)_n \text{ in } A \text{ mit } x_n \xrightarrow{o} x \} \quad (A \subset X)$$

definierten Abschlussoperator existiert eine (eindeutig bestimmte) Topologie $o^*-\tau$ auf X , für die gilt:

a) $\bar{A}$ ist die $o^*-\tau$ -abgeschlossene Hülle von A.

b) Es ist für Folgen $(x_n)_n$ in X

$$x_n \xrightarrow{o^*} x \iff x = o^*-\tau\text{-}\lim_n x_n.$$

Wegen b) nennen wir $o^*-\tau$ die Topologie der o^* -Konvergenz. Für einen Beweis vgl. ([18], S. 47, prop. 5.6). In diesem § wollen wir einige Eigenschaften dieser Topologie zusammenstellen. Als erstes zeigen wir:

2.5 Satz: Sei X ein Vektorverband mit der Diagonaleigenschaft. Dann besitzt $o^*-\tau$ eine Nullumgebungsbasis aus soliden Mengen. $(X, o^*-\tau)$ ist also ein topologischer Vektorverband, falls $o^*-\tau$ linear ist.

Beweis: Sei U eine beliebige $o^*-\tau$ -Nullumgebung. Wir setzen

$$W := \bigcup \{ B : B \subset U \text{ und } B \text{ ist solid} \}.$$

W ist solid mit $W \subset U$ und wir haben noch nachzuweisen, dass W eine $o^*-\tau$ -Nullumgebung ist. Sei hierzu $(x_n)_n$ gegeben mit $x_n \xrightarrow{o} \emptyset$. Wir setzen $W_n := \{ y \in X : |y| \leq |x_n| \}$. Es existiert ein n_0 mit $W_n \subset U$ für $n \geq n_0$. Denn sonst gäbe es eine Folge (y_n) mit $y_n \in W_n$ für alle n und $y_n \notin U$ für unendlich viele n. Da andererseits mit $(x_n)_n$ auch $(y_n)_n$ o -konvergent ist gegen $\emptyset$, steht dies im Widerspruch zur Annahme, dass U eine $o^*-\tau$ -Nullumgebung ist. Weil jedes W_n solid ist, folgt nach Definition von W, dass $W_n \subset W$ für $n \geq n_0$. Insbesondere ist für $n \geq n_0$ $x_n \in W$. $(x_n)_n$ war beliebig mit $x_n \xrightarrow{o} \emptyset$, so dass W nach Definition von $o^*-\tau$ eine $o^*-\tau$ -Nullumgebung ist. Der Rest der Behauptung folgt aus Definition 1.21. |

Uns ist nicht bekannt, ob $o^*-\tau$ stets eine lineare Topologie ist. In 2.10 geben wir für viele Fälle eine positive Antwort auf

diese nun naheliegende Frage.

Die folgenden Aussagen

dienen u.a. der Vorbereitung hierfür.

2.6 Lemma: Seien X_1 und X_2 Vektorverbände mit der Diagonaleigenschaft.

$\varphi: X_1 \longrightarrow X_2$ bilde o-konvergente Folgen in X_1 auf o-konvergente Folgen in X_2 ab. Dann ist φ stetig bezüglich der Topologien der o^* -Konvergenz.

Beweis: Aus 2.4 erkennt man sofort, dass das Urbild unter φ von abgeschlossenen Mengen abgeschlossen ist. |

2.7 Satz: Sei $(X_i)_I$ ($I \neq \emptyset$) eine Familie von Vektorverbänden mit der Diagonaleigenschaft. Sei

$$X_{(I)} := \{ (x_i)_I \in \prod_I X_i : x_i \neq 0 \text{ für höchstens abzählbar viele } i \}$$

mit der von der kanonischen Ordnung auf $\prod_I X_i$ induzierten Ordnung versehen. Dann gilt:

a) $X_{(I)}$ ist ein Vektorverband mit der Diagonaleigenschaft.

b) Für $J \subset I$ sei $o^*_{-\tau_J}$ auf $X_{(J)}$ gemäss a) und 2.4 definiert.

Dann ist $o^*_{-\tau_I}$ die grösste Topologie τ auf $X_{(I)}$, so dass für jede endliche Teilmenge H von I die Projektion

$$\pi_H: X_{(I)} \longrightarrow X_{(H)} \quad (o^*_{-\tau_H, \tau})\text{-stetig ist.}$$

Beweis: a) 1. Aus Definition 1.8 folgt, dass für Folgen Ordnungskonvergenz in $X_{(I)}$ äquivalent zur komponentenweisen Ordnungskonvergenz ist. Dabei hat man nur zu beachten, dass eine Folge in $X_{(I)}$, welche komponentenweise o-konvergiert, aufgrund der Definition von $X_{(I)}$ nicht nur komponentenweise, sondern auch in $X_{(I)}$ o-beschränkt ist.

2. Nachweis der Diagonaleigenschaft: Sei $x \xrightarrow[n]{n, m} x^n$ für alle n und $x \xrightarrow[n]{n} x$. Wir bestimmen durch ein Diagonalverfahren eine Folge $(m_n)_n$ mit $x \xrightarrow[n]{n, m_n} x$. Sei hierzu $(i_r)_r$ eine Abzählung von $\{i : \text{es ex. } n, m \text{ mit } x_{i_r}^{n, m} \neq 0 \text{ oder } x_{i_r}^n \neq 0\}$. Wir können durch Rekursion über r streng wachsende Folgen $(m_{r, k})_k$ auswählen mit

A. $m_{0, k} = k$ für alle k ,

B. Für $r \geq 1$ gelten $\alpha. (m_{r, k})_k \subset (m_{r-1, k})_k$

und $\beta. x_{i_r} \xrightarrow[n]{n, m_{r, n}} x_{i_r}$.

Denn sei $(m_{r-1, k})_k$ schon gewählt. Dann gilt nach Teil 1. dieses Beweises: $x_{i_r} \xrightarrow[n]{n, m} x_{i_r}^n$, also erst recht $x_{i_r} \xrightarrow[k]{n, m_{r-1, k}} x_{i_r}^n$. Da x_{i_r} die Diagonaleigenschaft hat, kann $(m_{r, k})_k$ mit den Eigenschaften $\alpha.$ und $\beta.$ gewählt werden.

Für $n \in \mathbb{N}$ sei nunmehr $m_n := m_{n, n}$. Weil $\alpha.$ für alle r erfüllt ist, gilt $\{m_n\}_{n \geq r_0} \subset (m_{r_0, k})_k$ für jedes r_0 . Die Folge $(x_{i_{r_0}}^{n, m_n})_n$ unterscheidet sich daher nur um endlich viele Glieder von einer Teilfolge von $(x_{i_{r_0}}^{n, m_{r_0, n}})_n$, welche wegen $\beta.$ o-konvergent gegen $x_{i_{r_0}}$ ist. Daher ist auch die Folge $(x_{i_{r_0}}^{n, m_n})_n$ selbst o-konvergent gegen $x_{i_{r_0}}$. r_0 war beliebig aus $\mathbb{N}$, so dass sich aus Teil 1. $x \xrightarrow[n]{n, m_n} x$ ergibt.

b) 1. Sei $K = \{i_r\}_r$ eine abzählbare Teilmenge von I . Seien x und $y^{n, m}$ ($n, m \in \mathbb{N}$) in $X(I)$ so, dass $x_i = y_i^{n, m} = 0$ ausserhalb von K und $y_{i_r} \xrightarrow[n]{n, m} x_{i_r}$ nur für alle r mit $r \leq n$. Dann existiert eine Folge $(m_n)_n$ mit $y \xrightarrow[n]{n, m_n} x$. Denn auch unter dieser Voraussetzung lassen sich Folgen $(m_{r, k})_k$ wie im obigen Beweis finden.

2. Aus Lemma 2.6 folgt, dass die Projektionen π_H für die Topologien der o^* -Konvergenz stetig sind.

3. Es bleibt zu zeigen, dass $o^*_{-\tau_I}$ gröber ist als jede Topologie, für welche alle endlich-dimensionalen Projektionen π_H stetig sind. Sei τ eine solche Topologie, $x \in X_{(I)}$ fest und B eine $o^*_{-\tau_I}$ -Umgebung von x . Um zu beweisen, dass B eine τ -Umgebung ist, zeigen wir die Existenz einer endlichen Menge $H \subset I$ und einer $o^*_{-\tau_H}$ -Umgebung U von $\pi_H(x)$ mit $\pi_H^{-1}(U) \subset B$.

Wäre nämlich für jede endliche Menge $H \subset I$ und jede $o^*_{-\tau_H}$ -Umgebung U von $\pi_H(x)$ die Menge $\pi_H^{-1}(U) - B$ nicht leer, so könnten wir Folgen $(x^{k,m})_m$ und $(i_{kl})_l$ durch Rekursion über k wie nachstehend definieren:

A. $(i_{0l})_l$ sei eine Abzählung von $\{i : x_i \neq 0\}$.

B. Die Folgen $(i_{k,l})_l$ seien für $k' < k$ schon gewählt. Die Menge $H_k := \{i_{jl} : j+1 \leq k\}$ ist endlich. Auf Grund unserer Annahme gibt es zu jedem U aus dem $o^*_{-\tau_{H_k}}$ -Umgebungsfilter $\mathfrak{B}_k$ von $\pi_{H_k}(x)$ ein $x^U \in \pi_{H_k}^{-1}(U) - B$. Sei damit

$E_k := \{\pi_{H_k}(x^U) : U \in \mathfrak{B}_k\}$. Wegen $\pi_{H_k}(x^U) \in E_k \cap U$ für alle

$U \in \mathfrak{B}_k$ ist nach Definition von $\mathfrak{B}_k$ $\pi_{H_k}(x) \in \overline{E_k}$. Nach Satz 2.4 existiert daher eine Folge $(U_m)_m$ mit $\pi_{H_k}(x^{U_m}) \xrightarrow[m]{o} \pi_{H_k}(x)$.

Es sei $x^{k,m} := x^{U_m}$.

C. $(i_{kl})_l$ sei eine Abzählung von $\{i : x_i^{k,m} \neq 0 \text{ für ein } m\}$.

Nach dieser Konstruktion ist $x^{k,m} \notin B$ für alle k, m und bei festem

k gilt für alle j, l mit $j + l \leq k$

$$(*) \quad x_{i_{jl}}^{k,m} \xrightarrow{\frac{o}{m}} x_{i_{jl}}.$$

Sei nun $K := \{i_{jl} : j \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}\}$. $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ sei eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Es sei $i_r := i_{\psi_1(r)\psi_2(r)}$. Damit ist $K = \{i_r\}_r$. Weiter sei $k_n := \max_{r \leq n} \psi_1(r) + \psi_2(r)$. Mit (*) ergibt sich

dann $x_{i_r}^{k_n,m} \xrightarrow{\frac{o}{m}} x_{i_r}$ für alle $r \leq n$. Schliesslich sei $y^{n,m} := x^{k_n,m}$.

Wegen der Wahl der (i_{kl}) gilt $x_{i_1} = y_1^{n,m} = \emptyset$ ausserhalb von K .

K und $(y^{n,m})$ erfüllen somit die Voraussetzungen der Aussage in Teil b) 1. dieses Beweises. Daher existiert eine Folge $(m_n)_n$, so dass $y^{n,m_n} \xrightarrow{\frac{o}{n}} x$. Da nach Konstruktion $y^{n,m_n} \notin B$ ist für jedes n , kann B keine $o^* - \tau_I$ -Umgebung von x sein, es sei denn, dass ein endliches $H \subset I$ existiert mit einer $\sigma^* - \tau_H$ -Umgebung U von $\pi_H(x)$, so dass $\pi_H^{-1}(U) \subset B$, d.h. dass B eine τ -Umgebung von x ist. |

Bemerkung: 1. Es sei erwähnt, dass man den Beweis von Satz 2.7 für beliebige Konvergenzbegriffe mit der „Diagonaleigenschaft“ formulieren kann und auf diese Weise u.a. eine Verallgemeinerung des Theorems 2.1 in [17] erhält.

2. In Teil b) bleibt offen, ob $o^* - \tau_I$ die Spur der Produkttopologie der Topologien $o^* - \tau_{\{1\}}$ ist.

2.8 Lemma: Sei X ein Vektorverband mit der Diagonaleigenschaft.

a) $o^* - \tau$ ist translations- und homothetieinvariant.

b) Sei Y ein weiterer Vektorverband mit der Diagonaleigenschaft und der zugehörigen Topologie $o^* - \tau'$. Der Vektor $\emptyset_Y$ habe eine

abzählbare $o^*-\tau'$ -Umgebungsbasis. Dann ist

$$o^*-\tau \times o^*-\tau' = o^*-\tau_{X \times Y},$$

wobei $X \times Y$ mit der kanonischen Ordnung versehen ist.

Beweis: a) Aus 1.11a und 2.6 folgt, dass für $x \in X$ und $0 \neq a \in \mathbb{R}$ die Abbildungen $y \mapsto x + y$, $y \mapsto ay$ stetig sind bezüglich $o^*-\tau$. Da dasselbe für $-x$ und a^{-1} gilt, sind sie sogar topologisch.

b) 1. Wegen 2.6 sind die beiden Projektionen $o^*-\tau_{X \times Y}$ -stetig. Also ist $o^*-\tau \times o^*-\tau'$ gröber als $o^*-\tau_{X \times Y}$.

2. Sei U eine $o^*-\tau_{X \times Y}$ -Nullumgebung. Wäre U keine $o^*-\tau \times o^*-\tau'$ -Nullumgebung, so gäbe es zu jeder $o^*-\tau$ -Nullumgebung B und jeder $o^*-\tau'$ -Nullumgebung B' ein

$$(+)\quad (x^{B, B'}, y^{B, B'}) \in B \times B' - U.$$

Sei $\mathfrak{B}'$ eine abzählbare $o^*-\tau'$ -Nullumgebungsbasis: $\mathfrak{B}' = \{B'_n\}_n$, und

sei $\mathfrak{B}$ eine beliebige $o^*-\tau$ -Nullumgebungsbasis. Zu $n \in \mathbb{N}$ sei

$E_n := \{x^{B, B'_n} : B \in \mathfrak{B}\}$. Wegen $x^{B, B'_n} \in B \cap E_n$ ist $\alpha_X \in \overline{E_n}$. Nach 2.4 existiert daher eine Folge $(B_{nk})_k$ in $\mathfrak{B}$ mit

$$x^{B_{nk}, B'_n} \xrightarrow[k]{o} \alpha_X.$$

Sei $x^{B_{nk}, B'_n} =: x^{nk}$. Da X die Diagonaleigenschaft hat, gibt es eine

Folge $(k_n)_n$ mit $x^{nk_n} \xrightarrow[n]{o} \alpha_X$. Zu x^{nk_n} gehöre $y^n := y^{B_{nk_n}, B'_n}$ gemäss

(+). Weil $y^n \in B'_n$ ist, folgt nach 2.4b $y^n \xrightarrow[n]{o^*} \alpha_Y$. Es existiert

also eine Folge $(n_m)_m$ mit $y^{n_m} \xrightarrow[m]{o} \alpha_Y$, und daher

$$U \not\supset (x^{n_m k_{n_m}}, y^{n_m}) \xrightarrow[m]{o} \alpha_{X \times Y},$$

im Widerspruch zu unserer Annahme über U . Der Rest der Behauptung folgt aus der Translationsinvarianz der beteiligten Topologien. |

2.9 Lemma: Sei X ein Archimedischer Vektorverband mit der Diagonaleigenschaft und der Topologie $o^*-\tau$. Dann ist die Skalarmultiplikation eine stetige Funktion von $\mathbb{R} \times X$ in X .

Beweis: Da $\mathbb{R}$ eine abzählbare Nullumgebungsbasis besitzt, braucht nach Lemma 2.8b nur die $(o^*-\tau_{\mathbb{R} \times X}, o^*-\tau)$ -Stetigkeit der Skalarmultiplikation nachgewiesen werden. Auf Grund von Lemma 2.6 genügt es daher, zu zeigen, dass aus $a_n \xrightarrow{o} a$ und $x_n \xrightarrow{o} x$ stets $a_n x_n \xrightarrow{o} ax$ folgt. Da in

$$a_n x_n - ax = a_n (x_n - x) + (a_n - a)x$$

der erste Summand der rechten Seite trivialerweise und der zweite wegen 1.13 o -konvergent ist gegen σ_X , folgt die Behauptung aus Lemma 1.11a. |

2.10 Satz: Sei X ein Archimedischer Vektorverband mit der Diagonaleigenschaft. Jede der folgenden Bedingungen ist hinreichend dafür, dass die Topologie $o^*-\tau$ linear ist:

- a) Es existiert eine $o^*-\tau$ -Nullumgebungsbasis aus konvexen Mengen.
- b) Die Produkttopologie auf $X \times X$ ist die Topologie der o^* -Konvergenz bezüglich der kanonischen Ordnung auf $X \times X$, d.h. es ist

$$o^*-\tau \times o^*-\tau = o^*-\tau_{X \times X}.$$

- c) Es existiert eine abzählbare $o^*-\tau$ -Nullumgebungsbasis. (In diesem Fall ist $o^*-\tau$ sogar metrisierbar).
- d) Es gibt eine Familie $(X_i)_{i \in I}$ von Archimedischen Vektorverbänden mit der Diagonaleigenschaft, so dass $X = X_{(I)}$ gemäss 2.7, und $o^*-\tau_{X_i}$ ist metrisierbar für jedes $i \in I$.

Beweis: Wegen Lemma 2.9 brauchen wir nur noch die Stetigkeit der Addition nachzuweisen.

a) Sei U eine konvexe Nullumgebung. Nach Lemma 2.8a ist auch $\frac{1}{2}U$ eine Nullumgebung und es gilt $\frac{1}{2}U + \frac{1}{2}U = U$. Also ist die Addition stetig im Nullpunkt. Mit $o^{*-}\tau$ (vgl. 2.8a) ist auch die Produkttopologie translationsinvariant und somit die Addition überall stetig.

b) 1.11a und 2.6 zeigen, dass die Addition $o^{*-}\tau_{X \times X}$ -stetig ist. Daraus folgt die Behauptung.

c) Wegen Lemma 2.8b impliziert c) die Bedingung b).

d) Sind (in der Bezeichnungsweise von Satz 2.7b) alle $o^{*-}\tau_{\{i\}}$ metrisierbar, so folgt mit 2.8b durch vollständige Induktion, dass für jede endliche Teilmenge H von I die Produkttopologie der $o^{*-}\tau_{\{i\}}$ ($i \in H$) gerade $o^{*-}\tau_H$ ist. Aus 2.7b folgt damit, dass $o^{*-}\tau_I$ das Produkt der $o^{*-}\tau_{\{i\}}$ ($i \in I$) ist. Mit Teil b) des vorliegenden Satzes ergibt sich die Behauptung. |

2.11 Satz: Sei X ein σ -vollständiger Vektorverband mit der Diagonaleigenschaft. Eine der Bedingungen a) - d) des vorigen Satzes sei erfüllt. Dann gilt:

a) $(X, o^{*-}\tau)$ ist ein topologischer Vektorverband.

b) $o^{*-}\tau$ ist die lineare Ordnungstopologie von X .

Beweis: a) Nach 1.7 ist X Archimedisch, so dass wegen des vorigen Satzes $o^{*-}\tau$ eine lineare Topologie ist. Das liefert mit Satz 2.5 die Behauptung.

b) Für den Beweis bezeichne τ die lineare Ordnungstopologie von X .

1. $\tau \subset o^* - \tau$. Sei A τ -abgeschlossen. Zu zeigen ist nach Satz 2.4 :

$A = \bar{A}$. Sei $(x_n)_n$ eine Folge in A mit $x_n \xrightarrow{o} x$. Wegen Lemma 2.3 gibt es ein $z \in X$ und eine Nullfolge $(a_n)_n$ mit $|x - x_n| \leq a_n z$ für alle n . Es ist also $x_n - x \in a_n B$, wobei $B = [-z, z]$. Da B nach Definition von τ beschränkt ist bezüglich τ , existiert zu jeder τ -Nullumgebung U ein $k \in \mathbb{N}$ mit $B \subset kU$. Für $a_n < k^{-1}$ ist also $x_n - x \in U$. Es folgt $x = \tau\text{-}\lim x_n \in A$ und daher $A = \bar{A}$.

2. $o^* - \tau \subset \tau$. Nach Definition von τ haben wir zu zeigen, dass jede o -beschränkte Menge B von jeder $o^* - \tau$ -Nullumgebung U absorbiert wird: Sei z so, dass $B \subset [-z, z]$ und $W \subset U$ eine solide (vgl. a)) $o^* - \tau$ -Nullumgebung. Sei $a > 0$ so, dass $az \in W$. Weil W solid ist, gilt dann auch $aB \subset W$, also $B \subset a^{-1}W \subset a^{-1}U$.

Das Bemerkenswerte an diesem Satz ist die Tatsache, dass die lineare Ordnungstopologie ohne expliziten Rückgriff auf die lineare Struktur allein durch die Ordnung charakterisiert werden kann. Der nächste Satz, der eine leichte Verschärfung von prop. 2.6, S. 164 in [18] darstellt, gibt ein weiteres Kriterium dafür an, dass eine vorgegebene lineare Topologie auf X mit $o^* - \tau$ zusammenfällt. Dabei wird zunächst nicht verlangt, dass X die Diagonaleigenschaft hat. Es sei übrigens darauf hingewiesen, dass man in 2.11 und 2.12b durch einige Zusatzüberlegungen (vgl. [7], dort insbesondere prop. 3.3) die Voraussetzung „ X ist σ -vollständig“ durch die Bedingung „ X ist Archimedisches und o -separabel“ ersetzen kann. Wir werden jedoch hiervon keinen Gebrauch machen.

2.12 Satz: X sei ein σ -vollständiger Vektorverband. τ sei eine metrisierbare lineare Topologie auf X mit τ -normalem X^+ , so dass für alle Folgen $(y_n)_n$ in X

$$y_n \downarrow_n \mathcal{O} \implies \mathcal{O} = \tau\text{-}\lim_n y_n.$$

Dann gilt:

- a) X ist σ -separabel.
- b) Ist (X, τ) ausserdem ein topologischer Vektorverband, der τ -vollständig ist oder die Eigenschaft $\tau\text{-}\mathcal{B}$ besitzt, so hat X die Diagonaleigenschaft und es ist $\tau = \mathcal{O}^* - \tau$.

Beweis: a) vgl. ([18], S. 164, prop. 2.6).

b) Nach Voraussetzung gibt es eine τ -Nullumgebungsbasis $\{W_n\}_n$ aus soliden Mengen, wobei $W_{n+1} + W_{n+1} \subset W_n$ angenommen sei. Wir behaupten zunächst:

(+) Für jede Folge $(y_n)_n$ mit $y_n \in W_n$ für alle n gilt $y_n \xrightarrow{\mathcal{O}} \mathcal{O}$.

Sei $(y_n)_n$ eine solche Folge. Wir setzen für $k \in \mathbb{N}$ $x_k := \sum_{n=1}^k |y_n|$.

Für $k > m \in \mathbb{N}$ gilt, weil die W_n solid sind,

$$x_k - x_m = \sum_{n=m+1}^k |y_n| \in W_{m+1} + \dots + W_k \subset W_m.$$

$(x_k)_k$ ist also eine monoton wachsende Cauchy-Folge. Daraus ergibt sich, dass sie ein Supremum x in X besitzt. Denn ist (X, τ) vollständig, so hat (x_k) einen Grenzwert, welcher wegen 1.15b und 1.22b auch ihr Supremum ist; hat (X, τ) dagegen die Eigenschaft $\tau\text{-}\mathcal{B}$, so folgt die Existenz von x aus der Tatsache, dass jede Cauchy-Folge τ -beschränkt ist und der σ -Vollständigkeit von X . Die Folge

$(x - x_k)_k$ ist monoton gegen $\mathcal{O}$ fallend und es ist $|y_m| = x_m - x_{m-1} \leq x - x_{m-1}$, $(y_m)_m$ ist also σ -konvergent gegen $\mathcal{O}$.

Nachweis der Diagonaleigenschaft: Seien (x_{nm}) , (y_n) und y so gegeben, dass $x_{nm} \xrightarrow{o} y_n$ für alle n und $y_n \xrightarrow{o} y$. Zu jedem n können wir nach Lemma 1.15a ein m_n so wählen, dass $y_n - x_{nm_n} \in W_n$ ist.

Auf Grund von (+) gilt damit die gesuchte Aussage

$$y - x_{nm_n} = (y - y_n) + (y_n - x_{nm_n}) \xrightarrow{o} 0.$$

Nachweis von $\tau = o^* - \tau$: 1. Aus 1.15a folgt, dass jede τ -abgeschlossene Menge bezüglich Ordnungskonvergenz und damit auch bezüglich $o^* - \tau$ abgeschlossen ist. - 2. Sei $A = \overline{A}$ $o^* - \tau$ -abgeschlossen und x ein τ -Berührungspunkt von A . Da τ metrisierbar ist, existiert eine Folge (x_m) in A , welche gegen x konvergiert. Wegen (+) ist $x_{m_n} \xrightarrow{o} x$ für eine passende Teilfolge $(x_{m_n})_n$, also liegt x in A .
Mithin ist A auch τ -abgeschlossen. |

§ 3. Lineare und sublineare Abbildungen

In diesem Paragraphen sind X und Y Vektorverbände und E ein (reeller) Vektorraum. Es werden Familien von Abbildungen von X oder E in Y betrachtet. Zunächst sei an einige bekannte und einfache Tatsachen erinnert.

3.1 Definition: a) Für lineare Abbildungen $T_1, \dots, T_n : X \longrightarrow Y$ ($i = 1, 2, \dots, n$) sei

$$T_1 \leq T_2 \quad : \Longleftrightarrow \quad T_1 x \leq T_2 x \quad \text{für alle } x \in X^+.$$

b) $T : X \longrightarrow Y$ sei linear. Dann heisst T

1. Nullabbildung ($T = 0$), falls $Tx = 0_Y$ für alle $x \in X$,
2. positiv, falls $0 \leq T$,
3. ordnungsbeschränkt, falls $T(B)$ in Y o-beschränkt ist für jedes o-beschränkte B in X ,
4. ordnungsfolgenstetig, falls stets

$$x_n \xrightarrow{0} x \implies Tx_n \xrightarrow{0} Tx.$$

Über den Zusammenhang zwischen b)3. und b)4. gelten die beiden folgenden Lemmata (vgl. [18], S. 52f):

3.2 Lemma: X sei Archimedisch und Y habe die Eigenschaft o- $\mathcal{B}$. Dann ist jede ordnungsfolgenstetige lineare Abbildung von X in Y ordnungsbeschränkt.

3.3 Lemma: X sei σ -vollständig und habe die Diagonaleigenschaft, Y sei Archimedisch. Dann ist jede ordnungsbeschränkte lineare Abbildung von X in Y ordnungsfolgenstetig.

Nützlich ist weiterhin:

3.4 Lemma: $T : X^+ \longrightarrow Y$ sei additiv und positiv homogen. Dann lässt sich T auf genau eine Weise zu einer linearen Abbildung von X in Y fortsetzen.

3.5 Definition: Eine Abbildung $S : E \longrightarrow Y$ heisst subadditiv, falls $S(e + e') \leq S(e) + S(e')$ für alle $e \in E, e' \in E$ ist. S heisst sublinear, falls S subadditiv und positiv homogen ist.

Bemerkung: 1. In unseren Anwendungen in den späteren Paragraphen werden wir uns nur für sublineare Abbildungen interessieren. Wir führen dennoch vorläufig diese Unterscheidung durch, um diejenigen Aussagen zu kennzeichnen, welche sich ohne weiteres auf den Fall von abelschen Gruppen statt Vektorräumen übertragen lassen.

2. In masstheoretisch orientierter Literatur heisst eine Abbildung $S : E \longrightarrow Y$ häufig dann sublinear, wenn die Abbildung $e \longmapsto |Se|$ sublinear im Sinne von 3.5 ist.

3.6 Lemma: $(S_\alpha)_A$ sei eine Familie von subadditiven Abbildungen von X^+ in Y , derart dass für jedes x in X^+ die Menge

$$\Phi_x := \left\{ \sum_{i=1}^n S_{\alpha_i} x_i : x_i \in X^+, x = \sum_{i=1}^n x_i, \alpha_i \in A, n \in \mathbb{N} \right\}$$

ein Supremum in Y besitzt. Dann gilt:

a) Die Abbildung $T : x \longmapsto \sup_x \Phi_x$ ist auf X^+ additiv.

b) Ist jedes S_α sublinear, so lässt sich T auf genau eine Weise zu einer linearen Funktion von X in Y fortsetzen.

Wir führen den Beweis von 3.6 in sehr enger Anlehnung an ([18], S. 21), wo die S_α als linear vorausgesetzt werden:

Seien x^0, x^1, x^2 in X^+ gegeben mit $x^0 = x^1 + x^2$. Offenbar ist

$\Phi_{x^1} + \Phi_{x^2} \subset \Phi_{x^0}$, also $\sup_{x^1} (\Phi_{x^1} + \Phi_{x^2}) \leq \sup_{x^0} \Phi_{x^0}$. Zum Nachweis der Umkehrung sei $\sum_{i=1}^m S_{\alpha_i} x_i^0$ ein beliebiges Element von Φ_{x^0} .

Nach dem Zerlegungslemma 1.3 gibt es x_i^1, x_i^2 ($i = 1, \dots, m$) in X^+ ,

so dass $x^1 = \sum_{i=1}^m x_i^1$, $x^2 = \sum_{i=1}^m x_i^2$ und für alle i $x_i^0 = x_i^1 + x_i^2$ ist.

Die Subadditivität der S_α liefert

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m S_{\alpha_i} x_i^0 &= \sum_{i=1}^m S_{\alpha_i} (x_i^1 + x_i^2) \leq \sum_{i=1}^m (S_{\alpha_i} x_i^1 + S_{\alpha_i} x_i^2) \\ &= \sum_{i=1}^m S_{\alpha_i} x_i^1 + \sum_{i=1}^m S_{\alpha_i} x_i^2. \end{aligned}$$

Es folgt $\sup_{x^1} (\Phi_{x^1} + \Phi_{x^2}) = \sup_{x^0} \Phi_{x^0}$ und daraus mit Lemma 1.2b die Behauptung a).

Die Behauptung b) ergibt sich nun aus Lemma 3.4.

Als Folgerung erhält man: (vgl. [18], S. 22):

3.7 Lemma: Ist Y o-vollständig, so ist der Raum der ordnungsbeschränkten linearen Abbildungen von X in Y bezüglich der Ordnung $\leq$ ein o-vollständiger Vektorverband.

Eine weitere Folgerung zu 3.6 ist das

3.8 Lemma: Sei (X, τ) ein topologischer Vektorverband. τ sei durch eine Norm $\|\cdot\|$ induziert, für welche eine positive reelle Zahl k existiert mit

$$(+)\quad \sum_{i=1}^n \|x_i\| \leq k \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|$$

für je endlich viele Elemente von X^+ . Dann existiert eine zu $\|\cdot\|$ äquivalente Norm auf X , welche auf X^+ additiv ist.

Beweis: Die Norm $\|\cdot\|$ ist eine sublineare Abbildung von X in $\mathbb{R}$.

Wegen (+) ist für jedes $x \in X^+$ die Menge $\{ \sum_{i=1}^n \|x_i\| : x_i \in X^+, x = \sum_{i=1}^n x_i \}$

nach oben beschränkt. Durch

$$q(x) := \sup \{ \sum_{i=1}^n \|x_i\| : x_i \in X^+, x = \sum_{i=1}^n x_i \}$$

ist nach Lemma 3.6 eine auf X^+ additive und positiv homogene Funktion definiert.

Für beliebiges x aus X setzen wir nun $\|x\|' := q(|x|)$. Dann ist $\|\cdot\|'$ eine (auf X^+ additive) Norm: 1. Für $a \in \mathbb{R}$, $x \in X$ gilt

$$\|ax\|' = q(|ax|) = q(|a||x|) = |a|q(|x|) = |a|\|x\|'.$$

2. Für $x \in X, y \in X$ gilt

$$\begin{aligned} \|x + y\|' &= q(|x + y|) \leq q(|x| + |y|) = q(|x|) + q(|y|) \\ &= \|x\|' + \|y\|', \end{aligned}$$

wobei das $\leq$ daraus folgt, dass q auf X^+ monoton, weil additiv und nicht negativ, ist.

3. $\|x\|' = 0 \iff x = 0$ ergibt sich aus

$$4. \quad \|x\| \leq \|x\|' \leq \text{const } \|x\|,$$

wobei die erste Ungleichung wegen

$$\|x\| = \|x^+ - x^-\| \leq \|x^+\| + \|x^-\| = q(x^+) + q(x^-) = q(|x|) = \|x\|'$$

gilt und zur zweiten Ungleichung zu bemerken ist, dass $\|x_n\| \longrightarrow 0$ wegen der Stetigkeit der Verbandsoperationen stets $\|x_n\| \longrightarrow 0$ zur Folge hat. Die Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ sind also äquivalent. |

Unser nächstes Ziel ist der in der Einleitung erwähnte Satz 3.12.

3.9 Lemma: $\sigma|E$ sei eine translations- und spiegelungsinvariante Topologie und $\tau|Y$ eine lineare Topologie mit τ -normalem Y^+ . Dann gilt:

- a) Eine subadditive Abbildung $S : E \longrightarrow Y$ mit $S \circ_E = \circ_Y$ ist genau dann stetig, wenn sie im Nullpunkt stetig ist.
- b) Eine Familie $(S_\alpha)_A$ subadditiver Abbildungen $S_\alpha : E \longrightarrow Y$ mit $S_\alpha \circ_E = \circ_Y$ für alle $\alpha \in A$ ist genau dann (überall) gleichgradig stetig, wenn sie im Nullpunkt gleichgradig stetig ist.

Beweis: a) folgt aus b) für $\{S_\alpha\}_A = \{S\}$.

b) Aus der Ungleichung $S_\alpha(e + e') \leq S_\alpha(e) + S_\alpha(e')$ erhält man durch Umbenennung

$$\begin{aligned} S_\alpha(e) - S_\alpha(e') &\leq (S_\alpha(e - e') + S_\alpha(e')) - S_\alpha(e') \\ &= S_\alpha(e - e'), \end{aligned}$$

und entsprechend

$$\begin{aligned} S_\alpha(e) - S_\alpha(e') &\geq S_\alpha(e) - (S_\alpha(e) + S_\alpha(e' - e)) \\ &= -S_\alpha(e' - e). \end{aligned}$$

Sei nun $(S_\alpha)_A$ im Nullpunkt gleichgradig stetig und e irgendein anderer Punkt in E . Durchläuft e' ein gegen e konvergentes Netz, so konvergieren $S_\alpha(e - e')$ und $-S_\alpha(e' - e)$ gleichmässig in α gegen $\circ_Y$. Die obigen Ungleichungen zeigen, dass

$$S_\alpha(e) - S_\alpha(e') \in [-S_\alpha(e' - e), S_\alpha(e - e')]$$

Da Y^+ τ -normal ist, konvergiert also auch $S_\alpha(e) - S_\alpha(e')$ gleichmässig in α gegen $\circ_Y$, d.h. $(S_\alpha)_A$ ist im Punkt e gleichgradig stetig.

3.10 Definition: a) Für eine Abbildung $R : E \longrightarrow Y$ definieren wir

$$|R| \text{ durch } |R|e := |Re|.$$

b) Eine Familie $(R_\alpha)_A$ von Abbildungen von E in Y heisst punktweise o-beschränkt, falls für jedes $e \in E$ die Menge $\{R_\alpha e\}_A$ in Y o-beschränkt ist.

c) Sei $(R_\alpha)_A$ punktweise o-beschränkt und Y o-vollständig. Dann definieren wir $\sup_A R_\alpha$ und $\inf_A R_\alpha$ durch

$$(\sup_A R_\alpha) e := \sup \{R_\alpha e\}_A \text{ und } (\inf_A R_\alpha) e := \inf \{R_\alpha e\}_A.$$

d) Sei $(R_\gamma)_\Gamma$ ein punktweise o-beschränktes Netz und Y o-vollständig. Dann setzen wir $\overline{\lim}_\Gamma R_\gamma := \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{\gamma' > \gamma} R_{\gamma'}$, und entsprechend $\underline{\lim}_\Gamma R_\gamma := \sup_{\gamma \in \Gamma} \inf_{\gamma' > \gamma} R_{\gamma'}$.

3.11 Lemma: Unter den Voraussetzungen von 3.10 gilt:

a) Ist R additiv, so ist $|R|$ subadditiv.

b) Ist jedes R_α subadditiv, so ist $\sup_A R_\alpha$ subadditiv.

c) Ist jedes R_γ subadditiv, so ist $\overline{\lim}_\Gamma R_\gamma$ subadditiv.

d) Die Aussagen a)-c) bleiben gültig, wenn man "additiv" und "subadditiv" durch "linear" und "sublinear" ersetzt.

Beweis: a) und b) folgen aus Lemma 1.2.

c) Für jedes $e \in E$ ist das Netz $(\sup_{\gamma' > \gamma} R_{\gamma'} e)_{\gamma \in \Gamma}$ o-konvergent (monoton fallend) gegen $\overline{\lim}_\Gamma R_\gamma e$. Da für jedes $\gamma \in \Gamma$ nach b)

$$\sup_{\gamma' > \gamma} R_{\gamma'} (e + e') \leq \sup_{\gamma' > \gamma} R_{\gamma'} e + \sup_{\gamma' > \gamma} R_{\gamma'} e' \quad (e, e' \in E)$$

gilt, folgt mit 1.11

$$\overline{\lim}_\Gamma R_\gamma (e + e') \leq \overline{\lim}_\Gamma R_\gamma e + \overline{\lim}_\Gamma R_\gamma e' \quad (e, e' \in E).$$

d) ist trivial. |

3.12 Satz: $\sigma|E$ sei eine Topologie wie in Lemma 3.9 . . Y sei σ -vollständig und $\tau|Y$ sei eine lineare Topologie mit τ -normalem Y^+ .

- a) $(T_\alpha)_A$ sei eine punktweise σ -beschränkte Familie von linearen Abbildungen von E in Y . Aus der Stetigkeit von $\sup_A |T_\alpha|$ im Nullpunkt folgt die Stetigkeit von $\sup_A |T_\alpha|$, $\sup_A T_\alpha$ und $\inf_A T_\alpha$ auf ganz E .
- b) $(S_\gamma)_\Gamma$ sei ein punktweise σ -beschränktes Netz subadditiver Abbildungen von E in Y^+ mit $S_\gamma \circ_E = \circ_Y$ für alle $\gamma \in \Gamma$. Aus der Stetigkeit von $\sup_\Gamma S_\gamma$ (im Nullpunkt) folgt die Stetigkeit von $\varinjlim_\Gamma S_\gamma$.
- c) $(T_\gamma)_\Gamma$ sei ein punktweise σ -beschränktes Netz linearer Abbildungen von E in Y . Ist $\sup_\Gamma |T_\gamma|$ stetig und (Y, τ) separiert, so ist die Menge

$$\{ e \in E : (T_\gamma e)_\Gamma \text{ ist } \sigma\text{-konvergent in } Y \}$$

abgeschlossen in E .

Beweis: a) Ist die Abbildung $\sup_A |T_\alpha|$ stetig im Nullpunkt, so ist sie nach 3.9a und 3.11a, b auf ganz E stetig. - Da $\sup_A T_\alpha$ nach 3.11b ebenfalls subadditiv ist, brauchen wir wegen 3.9 nur die Stetigkeit im Nullpunkt nachzuweisen. Diese folgt auf Grund der τ -Normalität von Y^+ aus der Beziehung

$$- \sup_A |T_\alpha| e \leq \sup_A T_\alpha e \leq \sup_A |T_\alpha| e .$$

Die Aussage für $\inf_A T_\alpha$ ergibt sich wie üblich durch Einsetzen von $(-T_\alpha)_A$ an Stelle von $(T_\alpha)_A$.

b) Wegen $S_\gamma(E) \subset Y^+$ gilt $\circ_Y \leq \varinjlim_\Gamma S_\gamma e \leq \sup_\Gamma S_\gamma e$ für alle $e \in E$.

Wie in a) impliziert dies die Stetigkeit von $\overline{\lim}_{\Gamma} S_{\gamma}$ im Nullpunkt, weil Y^+ τ -normal ist. Weiter ist mit $S_{\gamma} \sigma_E = \sigma_Y$ ($\gamma \in \Gamma$) auch $\overline{\lim}_{\Gamma} S_{\gamma} \sigma_E = \sigma_Y$, und nach 3.11c ist $\overline{\lim}_{\Gamma} S_{\gamma}$ subadditiv. Mit 3.9a erhält man die behauptete Stetigkeit von $\overline{\lim}_{\Gamma} S_{\gamma}$.

c) Sind die T_{γ} linear, so ist für jedes γ durch $S_{\gamma} := \sup_{\gamma' > \gamma} T_{\gamma'} - \inf_{\gamma' > \gamma} T_{\gamma'}$ eine subadditive Abbildung von E in Y^+ mit $S_{\gamma} \sigma_E = \sigma_Y$ definiert. Weiter gilt $\sup_{\Gamma} S_{\gamma} = \sup_{\Gamma} T_{\gamma} - \inf_{\Gamma} T_{\gamma}$, also ist $\sup_{\Gamma} S_{\gamma}$ nach Teil a) stetig. Andererseits ist

$$\overline{\lim}_{\Gamma} S_{\gamma} = \overline{\lim}_{\Gamma} T_{\gamma} - \underline{\lim}_{\Gamma} T_{\gamma}$$

also die rechte Seite hierin nach Teil b) stetig. Ist nun (Y, τ) separiert, so ergibt sich hieraus, dass die Menge

$\{ e : (T_{\gamma}e)_{\Gamma} \text{ ist } o\text{-konvergent} \} = \{ e : \overline{\lim}_{\Gamma} T_{\gamma}e - \underline{\lim}_{\Gamma} T_{\gamma}e = \sigma_Y \}$ abgeschlossen ist. |

Zum vorangegangenen Satz ebenso wie zum Rest dieses Paragraphen bemerken wir, dass es genügen würde, Y als σ -vollständig vorauszusetzen, wenn man es nur mit abzählbaren Netzen von Abbildungen zu tun hat.

Wir werden nun zeigen, dass unter geeigneten Zusatzvoraussetzungen über den Raum (E, σ) in 3.12 die Voraussetzungen über die S_{γ} und T_{γ} wesentlich abgeschwächt werden können. Zunächst der angekündigte „Satz von Banach-Steinhaus“ für sublineare Abbildungen:

3.13 Lemma: (E, σ) sei ein Bairescher topologischer Vektorraum, $\tau|_Y$ sei eine lineare Topologie mit τ -normalem Y^+ und $(S_{\alpha})_A$ eine Familie stetigersublinearer Abbildungen von E in Y^+ , welche punktweise τ -beschränkt sei. Dann ist $(S_{\alpha})_A$ gleichgradig stetig.

Beweis: Wegen 3.9b genügt es, die gleichgradige Stetigkeit im Nullpunkt nachzuweisen. Sei W eine o -konvexe τ -Nullumgebung. Sei $(S_\alpha)_A$ eine Familie stetiger sublinearer Abbildungen von E in Y^+ , so dass $\{S_\alpha e\}_A$ τ -beschränkt ist für jedes e in E . Wir haben zu zeigen, dass eine σ -Nullumgebung U in E existiert mit $S_\alpha e \in W$ für alle $e \in U$ und alle $\alpha \in A$.

Sei W' eine abgeschlossene kreisförmige τ -Nullumgebung mit $W' + W' \subset W$. Wir betrachten die Menge

$$B := \bigcap_A S_\alpha^{-1}(W').$$

Da W' abgeschlossen und die S_α stetig sind, ist B abgeschlossen.

Sei $e \in E$. Weil die Menge $\{S_\alpha e\}_A$ τ -beschränkt ist, existiert ein k_e aus $\mathbb{N}$ mit $\{S_\alpha e\}_A \subset k_e W'$, woraus wegen der Homogenität der S_α $k_e^{-1} \cdot e \in B$ folgt. Also ist $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} kB$. (E, σ) ist Bairesch, eine der abgeschlossenen Mengen kB enthält daher eine offene Teilmenge.

Sei entsprechend $e_0 \in E$ und eine σ -Nullumgebung U_0 mit $e_0 + U_0 \subset B$ gewählt und sei $e \in U_0$ beliebig. Es gilt

$$(+)\quad \sigma_Y \leq S_\alpha e = S_\alpha(e_0 + e - e_0) \leq S_\alpha(e_0 + e) + S_\alpha(-e_0)$$

für alle $\alpha \in A$. Es gibt ein k (etwa k_{-e_0}) mit $\{S_\alpha(-e_0)\}_A \subset kW'$.

Folglich liegt die rechte Seite von (+) in $W' + kW' \subset k(W' + W') \subset kW$, wenn man die Kreisförmigkeit von W' beachtet. Weil W o -konvex ist, ergibt sich $\{S_\alpha e\}_A \subset kW$. e war beliebig aus U_0 , so dass die Menge $U := k^{-1}U_0$ den gewünschten Anforderungen genügt.

Durch eine einfache Modifikation des obigen Beweises ergibt sich, dass die Aussage des Lemmas richtig bleibt, wenn man " (E, σ) sei Bairesch" durch " (E, σ) sei tonnelliert" ersetzt und dafür τ zusätzlich als lokalkonvex voraussetzt. Man braucht nämlich dann nur W' auch noch konvex zu wählen, damit die abgeschlossene konvexe Hülle

von B eine Tonne wird deren Bild im Abschluss der o-konvexen Hülle von W' , also erst recht in $\overline{W}$ enthalten ist. Wir werden aber von dieser Tatsache keinen Gebrauch machen. Auch die folgenden Ergebnisse bleiben unter den entsprechend modifizierten Voraussetzungen gültig. Als einfache Folgerung zu 3.13 erhalten wir

3.14 Lemma: (E, σ) sei ein Bairescher topologischer Vektorraum. Y sei o-vollständig und $\tau|Y$ sei eine lineare Topologie mit τ -normalem Y^+ sowie der Eigenschaft

$$(*) \quad y_Y \xrightarrow[\Gamma]{o} y \implies y = \tau\text{-}\lim_{\Gamma} y_Y$$

für alle Netze $(y_Y)_{\Gamma}$ in Y . $(S_{\alpha})_A$ sei eine punktweise o-beschränkte Familie stetiger sublinearer Abbildungen von E in Y^+ , so dass für jedes $e \in E$ die Menge $\{S_{\alpha}e\}_A$ nach oben gerichtet ist.

Dann ist $\sup_A S_{\alpha}$ stetig.

Beweis: Sei $e \in E$. Da die Menge $\{S_{\alpha}e\}_A$ nach oben gerichtet ist, kann man ihre Elemente als die Glieder eines monoton wachsenden Netzes (mit i.a. von A verschiedener Indexmenge) auffassen. Wegen $(*)$ ist daher $\sup_A S_{\alpha}e$ ein Berührungspunkt von $\{S_{\alpha}e\}_A$. Andererseits erfüllen die S_{α} wegen 1.16 die Voraussetzungen des Lemmas 3.13 und sind daher gleichgradig stetig. Also ist $\sup_A S_{\alpha}$ stetig. |

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir zu unserem Hauptergebnis:

3.15 Satz: (E, σ) sei ein Bairescher topologischer Vektorraum. (Y, τ) sei ein o-vollständiger topologischer Vektorverband mit der Eigenschaft

$$(*) \quad y_{\gamma} \xrightarrow[\Gamma]{o} y \implies y = \tau\text{-}\lim_{\Gamma} y_{\gamma}$$

für alle Netze $(y_{\gamma})_{\Gamma}$ in Y . Dann gilt:

a) Für ein punktweise o -beschränktes Netz $(S_{\gamma})_{\Gamma}$ von stetigen sublinearen Abbildungen von E in Y^+ sind die Abbildungen $\sup_{\Gamma} S_{\gamma}$ und $\overline{\lim}_{\Gamma} S_{\gamma}$ stetig.

b) Für ein punktweise o -beschränktes Netz $(T_{\gamma})_{\Gamma}$ von stetigen linearen Abbildungen von E in Y sind die Abbildungen $\sup_{\Gamma} |T_{\gamma}|$, $\sup_{\Gamma} T_{\gamma}$, $\inf_{\Gamma} T_{\gamma}$ stetig und, falls (Y, τ) separiert ist

$\{ e : (T_{\gamma}e)_{\Gamma} \text{ ist } o\text{-konvergent in } Y \}$

abgeschlossen in E .

Beweis: a) Mit $\mathcal{E}$ bezeichnen wir die Menge aller endlichen Teilmengen der Indexmenge Γ . Für $\Delta \in \mathcal{E}$ setzen wir $S_{\Delta} := \sup_{\gamma \in \Delta} S_{\gamma}$.

Jedes S_{Δ} ist stetig, da in Y nach Lemma 1.22a die Verbandsoperationen stetig sind. Weiter ist für jedes e die Menge $\{S_{\Delta}e\}_{\Delta \in \mathcal{E}}$ wegen $S_{\Delta_1 \cup \Delta_2} e = S_{\Delta_1} e \vee S_{\Delta_2} e$ nach oben gerichtet mit $\sup_{\mathcal{E}} S_{\Delta} e = \sup_{\Gamma} S_{\gamma} e$. 3.14 zeigt daher die Stetigkeit von $\sup_{\Gamma} S_{\gamma}$ und damit wegen 3.12b diejenige von $\overline{\lim}_{\Gamma} S_{\gamma}$.

b) Mit $S_{\gamma} := |T_{\gamma}|$ folgt die Stetigkeit von $\sup_{\Gamma} |T_{\gamma}|$ aus Teil a). Der Rest der Behauptung ergibt sich mit 3.12a,c.

Seien (X, σ) und (Y, τ) Vektorverbände, wobei über die Topologien ähnliche Voraussetzungen gelten wie in 3.14. Dann ist es leicht, für Mengen linearer Abbildungen von X in Y , welche bezüglich der Ordnung $\leq'$ (vgl. Def. 3.1) nach oben gerichtet sind, aus 3.14

die Existenz von Suprema bezüglich $\leq'$ zu folgern. Wir wollen dies nicht ausführen, da ähnliche Aussagen (mindestens im lokal-konvexen Fall) seit längerem bekannt sind. (So z.B. Schaefer (1959), vgl. etwa [18], S. 181, prop. 3.17 ¹⁾).

Stattdessen wollen wir unter Verwendung von 3.15 zeigen, dass gelegentlich die Forderung, die betrachteten Mengen linearer Abbildungen seien nach oben gerichtet, weggelassen werden kann. Der folgende Satz ist für den Fall von endlich vielen linearen Abbildungen im wesentlichen äquivalent zu einem Resultat von Krengel ([14], vgl. hierzu auch prop. 3.8, S. 174 in [18]). In einer anderen Richtung ist dieser Satz erst kürzlich in [16] verallgemeinert worden.

3.16 Satz: $(X, \|\cdot\|)$ sei ein L-Raum. (Y, τ) sei ein ordnungsvollständiger topologischer Vektorverband mit der Eigenschaft $\tau\text{-}\mathfrak{B}$. τ sei lokal-konvex und es gelte

$$(*) \quad y_\gamma \xrightarrow[\Gamma]{o} y \quad \implies \quad y = \tau\text{-}\lim_{\Gamma} y_\gamma$$

für alle Netze $(y_\gamma)_{\Gamma}$ in Y . Dann gilt:

Jede punktweise o-beschränkte Familie stetiger linearer Abbildungen von X in Y besitzt bezüglich der Ordnung $\leq'$ ein Supremum in dem Vektorraum aller stetigen linearen Abbildungen von X in Y .

Vor den Beweis stellen wir noch zwei erläuternde Bemerkungen:

1. Auf Grund von Lemma 1.15 und dem bekannten Kakutani-schen Darstellungssatz erkennt man leicht, dass jeder L-Raum die in unserem

¹⁾ Es scheint, dass die Voraussetzungen an der zitierten Stelle noch ergänzt werden müssen, etwa durch die Annahme, dass der Bildraum die Eigenschaft $\tau\text{-}\mathfrak{B}$ besitzt.

Satz an (Y, τ) gestellten Forderungen erfüllt. Daraus ergibt sich mit unserem Satz die auf S. 2 in der Einleitung formulierte Aussage.

2. Wir betrachten den folgenden Spezialfall: X sei der Raum $L^1(\mu)$ für ein endliches Mass μ und es sei $Y = \mathbb{R}$. Dann kann man nach Radon die stetigen linearen Abbildungen vermöge der Beziehung $u(f) = \int u \cdot f \, d\mu$ mit den Elementen von $L^\infty(\mu)$ identifizieren, wobei die Ordnung $\leq$ mit der üblichen Ordnung von $L^\infty(\mu)$ übereinstimmt. Eine punktweise o -beschränkte Teilmenge von $L^\infty(\mu)$ ist in diesem Fall nichts anderes als eine $\sigma(L^\infty(\mu), L^1(\mu))$ -beschränkte Menge. Die Aussage des Satzes besagt, dass jede solche Menge ein Supremum in $L^\infty(\mu)$ besitzt. In diesem Spezialfall ist dies auch eine direkte Folgerung des Satzes von Banach-Steinhaus: Danach ist eine $\sigma(L^\infty(\mu), L^1(\mu))$ -beschränkte Menge auch beschränkt für die Normtopologie von $L^\infty(\mu)$, welche mit der Dualraum - Normtopologie übereinstimmt. Damit ist diese Menge in $L^\infty(\mu)$ ordnungsbeschränkt. Wegen der Endlichkeit des Masses ist $L^\infty(\mu)$ o -vollständig, so dass die Behauptung folgt. Dieser Schluss hängt wesentlich an der Tatsache, dass in $L^\infty(\mu)$ eine normbeschränkte Menge o -beschränkt ist, was für die L^p -Räume mit $p < \infty$ falsch wird.

Beweis zu 3.16: Sei $(T_\alpha)_A$ eine punktweise o -beschränkte Familie stetiger linearer Abbildungen von X in Y . Wir schreiben T^* für $\sup_A T_\alpha$. T^* ist positiv homogen und nach 3.15 stetig, bildet also $\|\cdot\|$ -beschränkte Mengen in τ -beschränkte Mengen ab. Da τ ausserdem lokalkonvex ist, ist also auch die konvexe Hülle von T^*K τ -beschränkt, wobei K die Einheitskugel in X bezeichnet. Sei $x \in X^+$ mit $\|x\| = 1$ fest gewählt. Für je endlich viele $x_1, \dots, x_n$ in X^+ mit

$x = \sum_{i=1}^n x_i$ gilt: Der Vektor $\sum_{i=1}^n T^* x_i$ liegt in der konvexen Hülle von $T^* K$, denn man kann ihn in der Form $\sum_{i=1}^n \|x_i\| T^* \left(\frac{x_i}{\|x_i\|} \right)$ schreiben, was wegen $\sum_{i=1}^n \|x_i\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\| = \|x\| = 1$ eine konvexe Kombination von Elementen von $T^* K$ ist. Also ist die Menge

$$\Psi_x := \left\{ \sum_{i=1}^n T^* x_i : x_i \in X^+, x = \sum_{i=1}^n x_i \right\}$$

τ -beschränkt. Wie im Beweis zu Lemma 3.6 folgt aus dem Zerlegungslemma 1.3 wegen der Subadditivität von T^* , dass Ψ_x nach oben gerichtet ist. Da (Y, τ) die Eigenschaft $\tau\text{-}\mathcal{B}$ besitzt und o -vollständig ist, existiert ein Supremum zu Ψ_x in Y .

Dies gilt offenbar nicht nur für die $x \in X^+$ mit $\|x\| = 1$, sondern für alle $x \in X^+$. Die Abbildung $x \mapsto \sup \Psi_x$ lässt sich daher nach Lemma 3.6 eindeutig zu einer linearen Abbildung $\hat{T} : X \rightarrow Y$ fortsetzen.

$\hat{T}$ ist stetig: Für $x \in KX^+$ liegt wegen (*) $\hat{T}x$ nach Konstruktion im Abschluss der konvexen Hülle von $T^* K$, also ist $\hat{T}(KX^+)$ τ -beschränkt, d.h. die Einschränkung von $\hat{T}$ auf den positiven Kegel von X ist im Nullpunkt stetig. Wegen der Beziehung $\hat{T}x = \hat{T}x^+ - \hat{T}x^-$ und der Stetigkeit der Verbandsoperationen in einem L -Raum ist $\hat{T}$ stetig im Ursprung und damit auf ganz X als lineare Abbildung.

Offenbar gilt $T_\alpha \leq \hat{T}$ für alle $\alpha \in A$. Umgekehrt sei T' eine obere Schranke der T_α . Dann ist für jedes $x \in X^+$ $T'x \geq \sup \Psi_x = \hat{T}x$, d.h. $\hat{T}$ ist die kleinste obere Schranke der T_α . |

§ 4. Der Raum $M(\Omega, \mathfrak{R}, \mu)$

4.1 Definition: $(\Omega, \mathfrak{R}, \mu)$ sei ein Massraum.

a) Mit $M(\Omega, \mathfrak{R}, \mu)$ (häufig kürzer $M(\mu)$) bezeichnen wir den ¹⁾Vektorverband der μ -Äquivalenzklassen von (endlich-wertigen) reellen $\mathfrak{R}$ -messbaren Funktionen auf Ω .

b) f, g, h bezeichnen stets Elemente von $M(\mu)$ in diesem Paragraphen. Zugehörige Repräsentanten bezeichnen wir mit $\hat{f}, \hat{g}, \hat{h}$.

4.2 Bemerkung: Ist $\nu|\mathfrak{R}$ ein zu $\mu|\mathfrak{R}$ äquivalentes Mass, so ist $M(\mu) = M(\nu)$. Zu jedem σ -endlichen Mass existiert ein äquivalentes endliches Mass.

In diesem Paragraphen wollen wir zunächst untersuchen, welche masstheoretische Interpretation die Begriffe der ersten drei Paragraphen im Fall des Vektorverbandes $M(\mu)$ zulassen. Von den bekannten Aussagen dieser Art sind die für uns wichtigsten im Lemma 4.4 zusammengefasst. Die meisten finden sich neben einer Reihe von anderen ordnungstheoretischen Aussagen über $M(\mu)$ - allerdings in veränderter Terminologie - in dem Kapitel IV von [13].

4.3 Definition: Ein Mass $\mu|\mathfrak{R}$ heisst lokalisierbar, wenn jede Teilmenge von $\mathfrak{R}$ ein μ -essentielles Supremum in $\mathfrak{R}$ besitzt.

4.4 Lemma: a) $M(\mu)$ ist ein σ -vollständiger Vektorverband.

b) $M(\mu)$ ist genau dann σ -vollständig, wenn $\mu|\mathfrak{R}$ lokalisierbar ist.

¹⁾ Üblichen

c) Für eine Folge in $M(\mu)$ ist o -Konvergenz äquivalent zur μ -Fast-Überall-Konvergenz einer zugehörigen Repräsentantenfolge.

d) Ist $\mu|_{\Omega}$ σ -endlich, so gilt:

i) $M(\mu)$ ist o -separabel

ii) Eine Teilmenge B von $M(\mu)$ ist genau dann o -beschränkt, wenn jede abzählbare Teilmenge von B o -beschränkt ist.

iii) $M(\mu)$ hat die Diagonaleigenschaft und bildet mit der Topologie der o^* -Konvergenz einen topologischen Vektorverband.

e) Ist $\mu(\Omega) < \infty$, so ist durch

$$d(f, g) = \int_{\Omega} \frac{|\hat{f} - \hat{g}|}{1 + |\hat{f} - \hat{g}|} d\mu$$

eine vollständige Metrik auf $M(\mu)$ erklärt. Für eine Folge $(f_n)_n$ in $M(\mu)$ sind äquivalent:

i) $d(f_n, f) \xrightarrow{n} 0$

ii) $f_n \xrightarrow[n]{o^*} f$

iii) $\hat{f}_n$ konvergiert nach Mass μ gegen $\hat{f}$.

Bemerkung: Dass die Metrik d aus Teil e) eine lineare Topologie definiert, welche $M(\mu)$ zu einem topologischen Vektorverband macht, ist unmittelbar einsichtig. Man kann daher aus der Vollständigkeit von d mit Hilfe von 2.12 und der Bemerkung 4.2 einen neuen Beweis für die übrigen Aussagen von Teil c) und Teil d) gewinnen. Dabei beachte man, dass d)ii aus d)i durch Anwendung der Beschränkungs-transformation $f \mapsto \frac{|f|}{1 + |f|}$ folgt.

Sei $\tilde{M}(\mu)$ der Verband der μ -Äquivalenzklassen von $\tilde{\mathbb{R}}$ -wertigen

Funktionen. Der von vielen Autoren ¹⁾ verwendete Begriff der Ordnungskonvergenz in $\tilde{M}(\mu)$ ist auch für Elemente von $M(\mu)$ schwächer als unser Ordnungskonvergenzbegriff, da die betrachteten Netze nicht in $M(\mu)$ o-beschränkt sein müssen. Wir haben die obige Definition gewählt, da es in der allgemeineren Situation nicht möglich wäre, die Aussagen der früheren Paragraphen zu verwenden, weil $\tilde{M}(\mu)$ kein Vektorraum ist. Andererseits wird der nächste Paragraph zeigen, dass viele klassische Konvergenzaussagen auch mit der o-Konvergenz in $M(\mu)$ gültig sind.

Wir werden nun Lemma 4.4 wie folgt ergänzen : Zunächst geben wir in Satz 4.6 eine zu 4.4c analoge Charakterisierung der Ordnungskonvergenz für allgemeine Netze für eine grosse Klasse von Massräumen. In 4.9 erhalten wir mit Hilfe des Satzes 2.7 eine Verallgemeinerung der Äquivalenzaussage aus 4.4e. Danach weisen wir in 4.11 und 4.12 die Gültigkeit der Eigenschaften o- $\mathcal{B}$ und τ - $\mathcal{B}$ nach, was zu der in der Einleitung erwähnten Anwendung 4.13 führt.

4.5 Definition: Man sagt, dass ein Mass $\mu|\mathcal{R}$ die Endliche-Teilmenge-Eigenschaft habe, falls zu jedem $D \in \mathcal{R}$ mit $\mu(D) = \infty$ ein $C \in \mathcal{R}$ existiert mit $C \subset D$ und $0 < \mu(C) < \infty$.

4.6 Satz: Das Mass $\mu|\mathcal{R}$ habe die Endliche-Teilmenge-Eigenschaft und sei lokalisierbar. Dann gilt für ein Netz $(f_\gamma)_\Gamma$ in $M(\mu)$ $f_\gamma \xrightarrow[\Gamma]{o} f$ genau dann, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

i) $\{f_\gamma\}_\Gamma$ ist o-beschränkt.

ii) Für alle $\varepsilon > 0$, $C \in \mathcal{R}$ mit $\mu(C) < \infty$ und für jede Familie $(A_\gamma)_\Gamma$,

wo A_γ für alle γ eine abzählbare Teilmenge von $\{\gamma': \gamma' > \gamma\}$ ist, gilt

$$(*) \quad \mu(\text{CN}\{\omega : \sup_{\gamma' \in A_\gamma} |\hat{f}_{\gamma'}(\omega) - \hat{f}(\omega)| \geq \varepsilon \}) \xrightarrow{\Gamma} 0. \quad ^1)$$

Beweis: 1. Notwendigkeit: Es gelte $f_\gamma \xrightarrow{0} f$. Nach Definition 1.10 gilt i) und es gibt ein monoton fallendes Netz $(g_\gamma)_\Gamma$ in $M(\mu)$ mit

$$(+)$$

$$|f_\gamma - f| \leq g_\gamma \quad \text{für alle } \gamma \in \Gamma$$

und $\inf \{g_\gamma\}_\Gamma = 0$.

Für $C \in \mathcal{R}$ mit $\mu(C) < \infty$ erfüllt $M(C, \text{CN}\mathcal{R}, \mu|_{\text{CN}\mathcal{R}})$ nach 4.4d die Voraussetzungen von 1.15a, so dass die Einschränkungen $g_\gamma|_C$ auch topologisch, d.h. wegen 4.4e nach Mass gegen $\mathcal{O}_{M(\mu|_{\text{CN}\mathcal{R}})}$ konvergieren. Es gilt also

$$(**) \quad \mu(\text{CN}\{\omega : \hat{g}_\gamma(\omega) \geq \varepsilon \}) \xrightarrow{\Gamma} 0$$

für jedes $\varepsilon > 0$.

Seien nun ε , C und $(A_\gamma)_\Gamma$ wie in ii) gegeben. Weil $(g_\gamma)_\Gamma$ monoton fällt und die A_γ abzählbar sind, folgt aus (+) und (**) die gewünschte Beziehung (*).

2. Umkehrung: Seien i) und ii) erfüllt. Weil $\mu|_{\mathcal{R}}$ lokalisierbar ist, folgt nach 4.4b für jedes γ die Existenz von

$$h_\gamma := \sup \{ |f_{\gamma'} - f| \}_{\gamma' > \gamma} \quad \text{und} \quad h := \inf \{ h_\gamma \}_\Gamma.$$

Wir haben noch zu zeigen: $h = 0$. Sei hierzu $\hat{h} \in h, \varepsilon > 0$ und

$D_\varepsilon := \{ \omega : \hat{h}(\omega) \geq \varepsilon \}$. Nach Voraussetzung gibt es ein $C \in \mathcal{R}$ mit $C \subset D_\varepsilon$ und $\mu(C) < \infty$. Da $M(C, \text{CN}\mathcal{R}, \mu|_{\text{CN}\mathcal{R}})$ o-separabel ist, ex-

¹⁾ Offenbar kommt es hierbei wegen der Abzählbarkeit der A_γ nicht auf die spezielle Wahl der Repräsentanten an.

istiert zu jedem γ eine abzählbare Teilmenge A_γ von $\{\gamma': \gamma' > \gamma\}$ mit $\sup \{|f_{\gamma'} - f| \chi_C\}_{A_\gamma} = h_\gamma \chi_C$ und damit wegen $C \subset D_\varepsilon$

$$\begin{aligned} \mu(C \cap \{\omega : \sup_{\gamma' \in A_\gamma} |\hat{f}_{\gamma'}(\omega) - \hat{f}(\omega)| \geq \varepsilon\}) &\geq \mu(C \cap \{\omega : \hat{h}(\omega) \geq \varepsilon\}) \\ &= \mu(C). \end{aligned}$$

Weil die linke Seite wegen ii) gegen 0 konvergiert, muss $\mu(C) = 0$ sein. Da dies für alle messbaren Teilmengen von D_ε mit endlichem Mass richtig ist und μ die Endliche-Teilmengen-Eigenschaft besitzt, ist auch $\mu(D_\varepsilon) = 0$. Dies gilt für alle $\varepsilon > 0$, also ist $h = 0$.

Die folgende Definition liegt nun nahe:

4.7 Definition: Die (eindeutig bestimmte) lineare Topologie auf $M(\mu)$, für welche die Mengen der Form

$$W(C, \varepsilon, \varepsilon') = \{f \in M(\mu) : \mu(C \cap \{\omega : |\hat{f}(\omega)| \geq \varepsilon\}) \leq \varepsilon'\}$$

mit $\varepsilon > 0$, $\varepsilon' > 0$, $C \in \mathcal{R}$ und $\mu(C) < \infty$ eine Nullumgebungsbasis bilden, heisst Topologie der stochastischen Konvergenz und wird im folgenden stets mit τ_μ bezeichnet. ¹⁾

Für endliches Mass stimmt τ_μ mit der Topologie der Konvergenz nach Mass überein und für σ -endliches μ mit der Topologie der o^* -Konvergenz. (Diese letzte Aussage folgt z.B. aus Satz 19.6, S. 85 in [2].) Unser nächstes Ziel ist es, dies in geeigneter Weise auf den Fall eines beliebigen Masses zu verallgemeinern. Der Vorbereitung dient ein auch sonst gelegentlich nützliches Lemma:

4.8 Lemma: a) $\mu|_{\mathfrak{R}}$ sei beliebig. Dann existiert eine Familie $(D_i)_I$ von bis auf μ -Nullmengen paarweise disjunkten Mengen in $\mathfrak{R}$ mit $\mu(D_i) < \infty$, so dass zu jedem σ -endlichen D in $\mathfrak{R}$ eine Folge $(i_n)_n$ in I und eine μ -Nullmenge N existieren mit

$$D \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{i_n} \cup N.$$

b) Sei $(D_i)_I$ wie in a). Dann ist

$$\left\{ W\left(\bigcup_{i \in H} D_i, \varepsilon, \varepsilon'\right) : \varepsilon > 0, \varepsilon' > 0, H \subset I, H \text{ endlich} \right\}$$

eine Nullumgebungsbasis für τ_μ .

Beweis: a) 1. Fall: Für alle $D \in \mathfrak{R}$ mit $\mu(D) > 0$ ist $\mu(D) = \infty$. Dann besteht die gesuchte Familie nur aus der leeren Menge.

2. Fall: Es existiert ein $D_0 \in \mathfrak{R}$ mit $0 < \mu(D_0) < \infty$. Das System $\mathfrak{A}$ aller Familien von modulo Nullmengen disjunkten messbaren Mengen mit positivem, endlichen Mass ist dann nicht leer und bezüglich der Inklusion induktiv geordnet. Sei $(D_i)_I$ ein maximales Element von $\mathfrak{A}$. Dann hat $(D_i)_I$ die gewünschte Eigenschaft: Sei nämlich $D \in \mathfrak{R}$, $D \subset \bigcup_{r=1}^{\infty} C_r$, $C_r \in \mathfrak{R}$ mit $\mu(C_r) < \infty$. Für jedes r ist die Menge $\{ i : \mu(D_i \cap C_r) > 0 \} =: I_r$ abzählbar und wegen der Maximalität von $(D_i)_I$ ist $C_r - \bigcup_{i \in I_r} D_i \cap C_r$ eine μ -Nullmenge, denn sonst könnte man $(D_i)_I$ noch um sie erweitern. Also ist

$$D \subset \bigcup_{r=1}^{\infty} \bigcup_{i \in I_r} D_i \cup N$$

mit einer Nullmenge N .

b) 1. Jedes $W\left(\bigcup_{i \in H} D_i, \varepsilon, \varepsilon'\right)$ ist offenbar eine τ_μ -Nullumgebung.

2. Umgekehrt sei $W(C, \varepsilon, \varepsilon')$ mit $\mu(C) < \infty$ gegeben. Dann gibt es nach Voraussetzung eine Folge $(i_n)_n$ in I mit $C \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{i_n} \cup N$. Wegen $\mu(C) < \infty$ gibt es ein k aus $\mathbb{N}$ mit

$$\mu\left(C - \bigcup_{n=1}^k D_{i_n}\right) \leq \frac{\varepsilon'}{2}.$$

Damit ist $W\left(\bigcup_{n=1}^k D_{i_n}, \varepsilon, \frac{\varepsilon'}{2}\right) \subset W(C, \varepsilon, \varepsilon')$, wie man aus der Definition der Mengen $W(., ., .)$ abliest.

4.9 Satz: Sei $M'(\mu)$ der Vektorverband aller $f \in M(\mu)$ mit σ -endlichem Träger. Dann gilt:

- a) $M'(\mu)$ hat die Diagonaleigenschaft.
- b) Die Topologie der o^* -Konvergenz in $M'(\mu)$ ist gleich der Spurtopologie $\tau_\mu|_{M'(\mu)}$.
- c) $\tau_\mu|_{M'(\mu)}$ ist die lineare Ordnungstopologie von $M'(\mu)$.

Beweis: Sei $(D_i)_I$ wie in Lemma 4.8. Dann ist $M'(\mu)$ isomorph zu dem gemäss Satz 2.7 gebildeten Vektorverband X_I , wobei für $i \in I$ $X_i = M(\mu|_{D_i \cap \Omega})$ sei. Teil a) unseres Satzes folgt damit aus 2.7a. Teil b) ergibt sich entsprechend aus 2.7b und 4.8b, wenn man noch 4.4e und die für endliche $H \subset I$ gültige Isomorphie

$$M\left(\mu \Big| \bigcup_{i \in H} D_i \cap \Omega\right) \cong \prod_{i \in H} X_i$$

beachtet.

- c) folgt aus b) und Satz 2.11.

Bemerkung: Teil b) ist deshalb bemerkenswert, weil beide Topologien im Gegensatz zum σ -endlichen Fall nicht metrisierbar zu sein brauchen.

4.10 Lemma: Eine Teilmenge B von $M(\mu)$ ist genau dann τ_μ -beschränkt, wenn für jedes $C \in \mathcal{R}$ mit $\mu(C) < \infty$ gilt

$$\sup_{f \in B} \mu(C \cap \{\omega: |\hat{f}(\omega)| \geq r\}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.$$

Beweis: Es ist B genau dann τ_μ -beschränkt, wenn zu jedem $W(C, \varepsilon, \varepsilon')$ ein n in $\mathbb{N}$ existiert mit $B \subset nW(C, \varepsilon, \varepsilon')$. Das ist bei festem C gleichbedeutend mit

$$\forall_{\varepsilon, \varepsilon' > 0} \exists_{n \in \mathbb{N}} \forall_{f \in B} \quad \frac{1}{n}f \in W(C, \varepsilon, \varepsilon')$$

d.h. mit

$$\forall_{\varepsilon, \varepsilon' > 0} \exists_{n \in \mathbb{N}} \forall_{f \in B} \quad \mu(C \cap \{\omega: \frac{1}{n}|\hat{f}(\omega)| \geq \varepsilon\}) \leq \varepsilon'$$

oder

$$\forall_{\varepsilon' > 0} \exists_{k \in \mathbb{N}} \forall_{f \in B} \quad \mu(C \cap \{\omega: |\hat{f}(\omega)| \geq k\}) \leq \varepsilon'.$$

Dies wiederum ist aber äquivalent zu

$$\sup_{f \in B} \mu(C \cap \{\omega: |\hat{f}(\omega)| \geq r\}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.$$

4.11 Lemma: Wenn μ lokalisierbar ist mit der Endliche-Teilmenge-Eigenschaft, dann hat $(M(\mu), \tau_\mu)$ die Eigenschaft τ_μ - $\mathcal{B}$.

Beweis: Sei $B \subset M(\mu)$ nach oben gerichtet und τ_μ -beschränkt. Wir haben zu zeigen, dass B in $M(\mu)$ nach oben beschränkt ist. Weil $\mu|_{\mathcal{R}}$ lokalisierbar ist, existiert $\sup B =: \tilde{g}$ jedenfalls in dem erweiterten Verband $\tilde{M}(\mu)$. Weil B nach oben gerichtet ist, ist $(r \wedge f)_{f \in B}$ für jedes $r \in \mathcal{R}$ ein monoton gegen $r \wedge \tilde{g}$ o-konvergentes Netz, so dass für jedes $C \in \mathcal{R}$ mit $\mu(C) < \infty$ nach 4.6

$$\mu(C \cap \{\omega: \hat{\tilde{g}}(\omega) \geq r\}) = \sup_B \mu(C \cap \{\omega: \hat{f}(\omega) \geq r\})$$

gilt, und damit nach Voraussetzung und Lemma 4.10 auch

$$\begin{aligned} \mu(C \cap \{ \omega : \hat{g}(\omega) = +\infty \}) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \mu(C \cap \{ \omega : \hat{g}(\omega) \geq r \}) \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \sup_B \mu(C \cap \{ \omega : \hat{f}(\omega) \geq r \}) = 0. \end{aligned}$$

Da $\mu|_B$ die Endliche Teilmenge-Eigenschaft hat, folgt $\mu(\{ \omega : \hat{g}(\omega) = +\infty \}) = 0$, also hat B sogar in $M(\mu)$ ein Supremum.!

Die entsprechende Aussage über die Eigenschaft σ - $\mathcal{B}$ formulieren wir gleich allgemeiner für die sogenannten Köthe-Funktionen-Räume:

4.12 Definition: Sei $(\Omega, \mathcal{R}, \mu)$ ein Massraum. Jeder Vektorraum Λ der Form

$$\{ f \in M(\mu) : \int_{\Omega} |fg| d\mu < \infty \text{ für alle } g \in Z \},$$

wobei Z eine beliebige Teilmenge von $M(\mu)$ ist, heisst ein Köthe-funktionen-Raum (über $(\Omega, \mathcal{R}, \mu)$).

Man vergleiche hierzu etwa [18], S. 13ff. Dort steht an Stelle eines beliebigen μ ein nicht-negatives Radon-Mass über einer lokalkompakten, σ -kompakten Grundmenge. Die folgenden elementaren Eigenschaften der Köthe-Funktionen-Räume werden jedoch von diesem Unterschied nicht berührt:

$$1. \text{ Sei } \Lambda^{\times} := \{ f \in M(\mu) : \int_{\Omega} |fg| d\mu < \infty \text{ für alle } g \in \Lambda \}.$$

Dann ist $\Lambda^{\times \times} = \Lambda$.

2. Λ ist ein Verbandsideal in $M(\mu)$, also insbesondere ein Vektorverband, welcher σ -vollständig ist, falls $M(\mu)$ σ -vollständig ist.

Der folgende Satz findet sich für Folgenräume bei Peressini ([18], S. 52) :

4.13 Satz: $\mu|_{\Omega}$ sei lokalisierbar mit der Endliche-Teilmenge-Eigenschaft. Dann hat jeder Köthe-Funktionen-Raum Λ über $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ die Eigenschaft $\sigma\text{-}\mathcal{B}$.

Beweis: I. Wir betrachten zunächst drei Spezialfälle für Λ :

1. $\Lambda = M(\mu)$. (also z.B. $Z = \emptyset$)

Die Behauptung folgt aus Lemma 4.11 mit Lemma 1.19.

2. $\Lambda = L^1(\mu)$. (also z.B. $Z = L^\infty(\mu)$)

Wieder auf Grund von Lemma 1.19 genügt es, sich von der Eigenschaft $\tau\text{-}\mathcal{B}$ zu überzeugen. Für $(L^1(\mu), \|\cdot\|)$ folgt diese z.B. aus einem allgemeinen Satz von Goffman (vgl. etwa [18], S. 139, 1.2a). Wir geben einen einfachen direkten Beweis: Sei H eine nach oben gerichtete norm-beschränkte Teilmenge von $L^1(\mu)$. Es gibt ein monoton wachsendes Netz $(f_\gamma)_\Gamma$, so dass $H = \{f_\gamma\}_\Gamma$. Sei $c := \sup_\Gamma \int_\Omega \hat{f}_\gamma d\mu$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein γ_ε mit $\int_\Omega \hat{f}_{\gamma_\varepsilon} d\mu \geq c - \varepsilon$. Aus $\gamma > \gamma_\varepsilon$ folgt wegen der Monotonie von $(f_\gamma)_\Gamma$, dass $c \geq \int_\Omega \hat{f}_\gamma d\mu \geq c - \varepsilon$ und $\|f_{\gamma_\varepsilon} - f_\gamma\| = \int_\Omega \hat{f}_\gamma - \hat{f}_{\gamma_\varepsilon} d\mu \leq \varepsilon$. $(f_\gamma)_\Gamma$ ist also ein Cauchy-Netz mit einem Grenzwert $f \in L^1(\mu)$. Aus Lemma 1.15b folgt $f_\gamma \uparrow_\Gamma f$, und damit $f = \sup_\Gamma f_\gamma = \sup H$.

3. $\Lambda = \Lambda_h := \{f \in M(\mu) : \int_\Omega |\hat{f} \hat{h}| d\mu < \infty\}$ für ein $h \in M(\mu)$.

Für ein $\hat{h} \in h$ sei $\Omega_1 := \{\omega : |\hat{h}(\omega)| > 0\}$ und $\Omega_2 := \{\omega : \hat{h}(\omega) = 0\}$. Für $f \in M(\mu)$ ist offenbar $f \in \Lambda_h$ genau dann, wenn $f \chi_{\Omega_1} \in L^1(\nu)$, wobei $d\nu = |h|d\mu$. Wir haben also eine natürliche Isomorphie

$$\Lambda_h \cong L^1(\nu_0) \times M(\mu_0),$$

wo $\nu_0 = \nu|_{\Omega_1 \cap \Omega}$ und $\mu_0 = \mu|_{\Omega_2 \cap \Omega}$ sei. Da mit μ auch μ_0 und ν_0 den Voraussetzungen des Satzes genügen, haben nach 1. und 2. auch

$L^1(v_0)$ und $M(\mu_0)$ die Eigenschaft $o-\mathcal{B}$. Da die o -Konvergenz in $L^1(v_0) \times M(\mu_0)$ komponentenweise erklärt werden kann, folgt die Behauptung für Λ_h aus der angegebenen Isomorphie.

II. Aus der Tatsache, dass jedes Λ_h die Eigenschaft $o-\mathcal{B}$ besitzt, und aus $\Lambda = \Lambda^{\times \times}$ folgt die Behauptung für beliebiges Λ genau wie bei Peressini [18], S. 52. (Sei $B \subset \Lambda$ so dass $a_n f_n \xrightarrow{o} 0$ für alle Folgen $(a_n)_n, (f_n)_n$ mit $a_n \longrightarrow 0$ und $\{f_n\}_n \subset B$. Sei $h \in \Lambda^\times$. Dann ist Λ ein Verbandsideal in Λ_h , o -Konvergenz in Λ impliziert also o -Konvergenz in Λ_h . Da Λ_h die Eigenschaft $o-\mathcal{B}$ hat, ist B in Λ_h o -beschränkt. - Zu $h \in \Lambda^\times$ existiert also ein $f_h \in \Lambda_h^+$ mit $B \subset [-f_h, f_h]$. Da $M(\mu)$ o -vollständig ist, besitzt die Menge $\{f_h : h \in \Lambda^\times\}$ ein Infimum f in $M(\mu)$, und es ist

$$B \subset \bigcap_{h \in \Lambda^\times} [-f_h, f_h] = [-f, f] .$$

Mit f_h ist auch f in Λ_h , und dies für jedes $h \in \Lambda^\times$. Daher ist

$$f \in \bigcap_{h \in \Lambda^\times} \Lambda_h = \{ g \in M(\mu) : \int_{\Omega} |\hat{g} \hat{h}| d\mu < \infty \text{ für alle } h \in \Lambda^\times \} = \Lambda^{\times \times} = \Lambda .$$

Also ist B in Λ o -beschränkt.) |

Bemerkung: Wenn man Lemma 4.11 zur Verfügung hat, ist der von uns eingeschlagene Weg zum Nachweis der Eigenschaft $o-\mathcal{B}$ der einfachste. Man kann jedoch, jedenfalls für den Raum $M(\mu)$, den Beweis auch direkt führen.

4.14 Folgerung: $\mu|_{\mathcal{R}}$ sei lokalisierbar und habe die Endliche-Teilmen-gen-Eigenschaft. Λ sei ein Köthe-Funktionen-Raum über $(\Omega, \mathcal{R}, \mu)$.

X sei ein Archimedischer Vektorverband. Für eine lineare Abbildung $T : X \longrightarrow \Lambda$ betrachte man die Bedingungen:

- i) $T = T_1 - T_2$ mit $T_1 \leq ' 0'$, $T_2 \leq ' 0'$
- ii) T ist ordnungsbeschränkt
- iii) T ist ordnungsfolgenstetig.

Dann gelten die folgenden Implikationen: i) $\iff$ ii) $\iff$ iii).
Ist X ausserdem σ -vollständig und hat X die Diagonaleigenschaft,
dann gilt auch ii) $\implies$ iii).

Beweis: Da jede positive lineare Abbildung ordnungsbeschränkt ist,
folgt i) $\iff$ ii) aus Lemma 3.7, weil Λ σ -vollständig ist.

iii) $\implies$ ii) folgt aus 3.2 und 4.13.

Der Rest der Behauptung folgt aus 3.3. |

Bemerkung: Für ii) $\implies$ iii) kann auf die Diagonaleigenschaft von
 X nicht verzichtet werden: Es sei $X := \{(x_n) \in \ell^\infty : \lim_n x_n \text{ existiert}\}$
und $\Lambda = \mathbb{R}$. Es sei $T(x_n) := \lim_n x_n$. T ist offenbar positiv, also
ordnungsbeschränkt, aber nicht ordnungsfolgenstetig: Sei x^k durch
 $x_n^k := x_{\{n:n>k\}}$ definiert. Dann gilt $x^k \downarrow 0$ in X , aber $\lim_k T x^k = 1$
 $\neq 0 = T 0$.

4.14 vereinigt einige im Fall der L^p -Räume bekannte Resultate,
die sich etwa bei Cogburn ([6], S. 635f), Krengel ([14]) und
N. Starr ([20]) finden.

Im restlichen Teil dieses Paragraphen betrachten wir noch einige
Eigenschaften der Topologie τ_μ . Dabei beschränken wir uns auf den
Fall, dass $\mu(\Omega) < \infty$. Im allgemeinen Fall können unsere Ergebnisse
mit Hilfe von Satz 4.9 leicht in Aussagen über $M^0(\mu)$ übersetzt
werden.

4.15 Satz: (Verhältnis von $L^1(\nu)$ ($\nu \sim \mu$) zu $M(\mu)$). Sei μ endlich.

- a) Es ist $M(\mu) = \bigcup \{ L^1(\nu) : \nu \sim \mu \}$.
- b) τ_μ ist die feinste Topologie auf $M(\mu)$, bezüglich der alle Injektionen $L^1(\nu) \hookrightarrow M(\mu)$ stetig sind, d.h. $(M(\mu), \tau_\mu)$ ist der topologische induktive Limes der Räume $(L^1(\nu), \|\cdot\|_1)$ bezüglich der natürlichen Einbettungen.
- c) Zu jeder abzählbaren Teilmenge B von $M(\mu)$ existiert ein ν mit $\nu \sim \mu$ und $B \subset L^1(\nu)$.
- d) Eine τ_μ -beschränkte Menge in $M(\mu)$ ist nicht notwendig in einem Raum $L^1(\nu)$ mit $\mu \sim \nu$ enthalten.
- e) Eine Folge $(f_n)_n$ in $M(\mu)$ mit $\tau_\mu\text{-}\lim f_n = \vartheta$ ist nicht notwendig in einem Raum $L^1(\nu)$ mit $\nu \sim \mu$ beschränkt (oder gar konvergent).

Beweis: a) Sei $f \in M(\mu)$. Für das Mass ν mit $d\nu = (\max(|f|, 1))^{-1} d\mu$ gilt $\int_\Omega |\hat{f}| d\nu \leq \int_\Omega 1 d\mu = \mu(\Omega) < \infty$, also ist $f \in L^1(\nu)$, wobei $\nu \sim \mu$, weil $(\max(|f|, 1))^{-1} > 0$ überall auf Ω ist.

b) Sei nun $\tilde{\tau}$ die Finaltopologie der Normtopologien bei den Injektionen $L^1(\nu) \hookrightarrow M(\mu); \nu \sim \mu$.

1. $\tilde{\tau} \subset \tau_\mu$. Zu zeigen ist : Jede $\tilde{\tau}$ -abgeschlossene Menge A ist τ_μ -abgeschlossen, d.h. wegen 4.4e und 2.4 : A enthält zu jeder o -konvergenten Folge in A auch deren Grenzwert. Sei also A $\tilde{\tau}$ -abgeschlossen und $f_n \xrightarrow{o} f$ mit $f_n \in A$ für $n \in \mathbb{N}$. Nach Definition der o -Konvergenz existiert ein $g \in M(\mu)$ mit $|f_n| \leq g$ für alle n . Zu g existiert nach Teil a) ein Mass ν mit $\nu \sim \mu$ und $g \in L^1(\nu)$. Es folgt $f_n \in L^1(\nu)$ und nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz $\int_\Omega |\hat{f}_n - \hat{f}| d\nu \xrightarrow{n} 0$. Da die Injektion $L^1(\nu) \hookrightarrow M(\mu)$ stetig ist, gilt $f = \tilde{\tau}\text{-}\lim f_n$. Also ist $f \in A$.

2. $\tau_\mu \subset \tilde{\tau}$. Zu zeigen ist: Für jedes v mit $v \sim \mu$ ist die Einbettung $L^1(v) \hookrightarrow M(\mu)$ stetig bezüglich τ_μ . Wegen 4.4e und 2.4 genügt es, $f_n \xrightarrow{o^*} f$ zu zeigen, falls f_n und f in $L^1(v)$ sind mit $0 = \lim_n \int_\Omega |\hat{f}_n - \hat{f}| dv$. Bekanntlich lässt sich aber zu jeder Teilfolge (f_{n_k}) eine Unterfolge $(f_{n_{k_l}})$ finden mit $\hat{f}_{n_{k_l}} \xrightarrow{\ell^2} \hat{f}$ v -f.ü., was gerade die o^* -Konvergenz in $M(v)$ und damit in $M(\mu)$ aussagt.

c) Sei $B = \{f_n\}_n$ eine abzählbare Teilmenge von $M(\mu)$. Für jedes n gilt $\frac{1}{m} f_n \xrightarrow{o} 0$. Auf Grund der Diagonaleigenschaft existiert eine Folge (m_n) natürlicher Zahlen mit $\frac{1}{m_n} f_n \xrightarrow{o} 0$. Es gibt also ein g in $M(\mu)$ mit $\frac{1}{m_n} |f_n| \leq g$ für alle n . Zu g gibt es ein v mit $v \sim \mu$ und $g \in L^1(v)$. Damit ist dann auch $f_n \in L^1(v)$ für alle n .

Die Teile d) und e) werden durch Angabe von Beispielen bewiesen:

d) μ sei endlich, $\neq 0$ und atomlos. Es sei

$$B := \{ f \in M(\mu) : \mu(\{\omega : |\hat{f}(\omega)| \geq k\}) \leq k^{-\frac{1}{2}} \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \}.$$

Nach Lemma 4.10 ist B τ_μ -beschränkt. Sei v irgendein zu μ äquivalentes Mass. Sei für $\varepsilon > 0$ $A^\varepsilon := \{\omega : \frac{dv}{d\mu}(\omega) \geq \varepsilon\}$ und ε_0 sei so gewählt, dass $\mu(A^{\varepsilon_0}) > 0$. Da μ atomlos ist, gibt es eine absteigende Folge (A_k) messbarer Teilmengen von A^{ε_0} mit $\mu(A_k) = k^{-\frac{1}{2}}$ für **schliesslich** alle k und $\mu(A_k) \leq k^{-\frac{1}{2}}$ für alle k . Dann ist durch $h := \sup_k k \chi_{A_k}$ ein Element von $M(\mu)$ erklärt, welches offenbar in B , aber nicht in $L^1(v)$ liegt. Denn es ist

$$\int_\Omega \hat{h} dv \geq \int_{A_k} \hat{h} dv = \int_{A_k} \hat{h} \frac{dv}{d\mu} d\mu \geq k \varepsilon_0 \mu(A_k) = k^{\frac{1}{2}} \varepsilon_0$$

für **schliesslich** alle k , also $\int_\Omega \hat{h} dv = \infty$.

$(\Omega, \mathcal{R}, \mu)$ sei jetzt der Lebesguesche Massraum über $[0, 1)$. Für $k \in \mathbb{N}$, $m \in \{1, \dots, k\}$ sei $f_{k,m} = k^2 \chi_{[\frac{m-1}{k}, \frac{m}{k}]}$. $(f_n)_n$ sei eine Abzählung der Dreiecksfolge $(f_{k,m})$. Offensichtlich konvergiert f_n nach Mass gegen 0. Für jedes Mass ν mit $\nu([0, 1)) > 0$ gilt jedoch $\lim_n \int_0^1 f_n \, d\nu = \infty$, denn für jedes k ist

$$\sum_{m=1}^k \int_0^1 f_{k,m} \, d\nu = \int_0^1 \sum_{m=1}^k f_{k,m} \, d\nu = \int_0^1 k^2 \chi_{[0, 1)} \, d\nu = k^2 \nu([0, 1)),$$

also muss es ein m_k geben mit $\int_0^1 f_{k, m_k} \, d\nu \geq k \nu([0, 1))$. Daraus folgt die Behauptung, weil die Folge unendlich viele solche f_{k, m_k} enthält. |

Wir wollen nun zeigen, dass die lineare Topologie τ_μ auf $M(\mu)$ i.a. hochgradig nicht lokalkonvex ist. Die Formulierung des folgenden Satzes und sein äusserst einfacher Beweis stammen von H. Pfister (mündliche Mitteilung) :

4.16 Satz: Sei μ endlich und atomlos. Sei (E, σ) ein semi-konvexer linearer Raum. $T : M(\mu) \longrightarrow E$ sei linear und (σ, τ_μ) -stetig. Dann ist $T(M(\mu)) \subset \overline{\{0_E\}}^\sigma$.

Beweis: Sei $y \in E - \overline{\{0_E\}}^\sigma$. Es existiert ein $p > 0$ und eine p -konvexe Nullumgebung U mit $y \notin U$. Da U p -konvex ist, gibt es ein $a > 0$ mit $U + U \subset aU$. Es folgt $T^{-1}(U) + T^{-1}(U) \subset aT^{-1}(U)$. Da T stetig ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $W(\Omega, \varepsilon, \varepsilon) \subset T^{-1}(U)$. Da μ atomlos ist, gibt es disjunkte $A_1, \dots, A_n$ aus $\mathcal{R}$ mit $\Omega = \bigcup_{i=1}^n A_i$, $\mu(A_i) \leq \varepsilon$. Daraus ergibt sich

$$M(\mu) = W(\Omega, \varepsilon, \varepsilon) + \dots + W(\Omega, \varepsilon, \varepsilon) \quad (n \text{ Summanden}) ,$$

da jedes f in $M(\mu)$ die Darstellung $f = \sum_{i=1}^n f \chi_{A_i}$ zulässt und offenbar $f \chi_{A_i} \in W(\Omega, \varepsilon, \varepsilon)$ ist für jedes i . Es existiert damit ein $r > 0$ mit $M(\mu) \subset rT^{-1}(U)$, also $M(\mu) = T^{-1}(U)$. Insbesondere ist $T^{-1}(\{y\}) = \emptyset$, da ja $y \notin U$ war. |

4.17 Folgerung: a) Ist μ endlich und nicht rein atomar, so ist

$(M(\mu), \tau_\mu)$ nicht semi-konvex.

b) Ist μ endlich und atomlos, so ist die konvexe Ordnungstopologie von $M(\mu)$ die triviale Topologie, und der stetige Dualraum von $(M(\mu), \tau_\mu)$ ist der Nullraum.

B Beweis: a) Sei $\mu = \mu_1 + \mu_2$ wobei μ_1 atomlos und μ_2 rein atomar ist.

Dann gibt es eine Zerlegung $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$ mit $\mu_1(\Omega_1) = \mu_1(\Omega)$. Die Zuordnung $f \mapsto f \chi_{\Omega_1}$ definiert eine injektive Abbildung

$T : (M(\mu_1), \tau_{\mu_1}) \longrightarrow (M(\mu), \tau_\mu)$, welche offenbar stetig und linear ist. Da $(M(\mu), \tau_\mu)$ separiert und nach Voraussetzung $M(\mu_1) \neq \{0\}$ ist, kann wegen 4.16 $(M(\mu), \tau_\mu)$ nicht semi-konvex sein.

b) 1. Sei σ die konvexe Ordnungstopologie von $M(\mu)$. σ ist gröber als die lineare Ordnungstopologie von $M(\mu)$, also nach 4.9c gröber als τ_μ . Die Identität $T : M(\mu) \longrightarrow M(\mu)$ ist also (σ, τ_μ) -stetig. Da σ lokalkonvex ist, folgt aus 4.16 $M(\mu) = T(M(\mu)) = \overline{\{0\}}^\sigma$, also die Behauptung. - 2. Sei $\varphi : M(\mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ linear und stetig. Nach 4.16 ist $\varphi \equiv 0$. |

Eine positive Konvexitätsaussage ist die folgende:

4.18 Satz: Sei μ endlich. $B \subset M(\mu)$ sei konvex und o -beschränkt in $M(\mu)$.

Dann ist die Spurtopologie $\tau_\mu|_B$ lokalkonvex, d.h. jeder Punkt von B hat bezüglich $\tau_\mu|_B$ eine Umgebungsbasis aus konvexen Mengen.

Beweis: Sei $f \geq 0$ so dass $B \subset [-f, f]$. Dann existiert ein Mass ν mit $\nu \sim \mu$ und $f \in L^1(\nu)$. Nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz (vgl. den Beweis zu 4.15b) stimmen auf B die Spurtopologien von $(M(\mu), \tau_\mu)$ und $(L^1(\nu), \|\cdot\|)$ überein. Da die Normtopologie lokalkonvex ist, folgt die Behauptung.

Bemerkung: Im Zusammenhang mit dem obigen Beweis sei hier erwähnt, dass man allgemein zeigen kann, dass jede beschränkte absolutkonvexe Menge in einem topologischen linearen Raum, welche im Sinn von 4.18 eine lokalkonvexe Spurtopologie hat, in einen lokalkonvexen linearen Raum affin und topologisch einbettbar ist.

4.19 Satz: Sei μ endlich und $G \subset M^+(\mu)$ so, dass $0 \notin \overline{G}$. Dann ist auch $0 \notin \overline{C_1(G)}$.

Wir geben zwei Beweise : einmal mit Hilfe von Satz 4.15b und einmal direkt, wobei der zweite Beweis zwar länger ist, aber den Vorteil hat, dass man eine explizite untere Schranke für den Abstand des Nullvektors zur Menge $C_1(G)$ in Abhängigkeit des Abstandes von 0 nach G erhält.

I. Sei $g \in \overline{C_1(G)}$. Es gibt eine Folge $(g_n)_n$ in $C_1(G)$ mit $g_n \xrightarrow{0} g$.

Dazu gibt es ein Mass ν mit $\nu \sim \mu$, so dass $\int_{\Omega} g_n \, d\nu \xrightarrow{n} \int_{\Omega} g \, d\nu$.
(majorisierte Konvergenz). Nach Satz 4.15b ist $L^1(\nu) \cap \bar{G}$ norm-
abgeschlossen in $L^1(\nu)$ und enthält nach Voraussetzung nicht den
Nullpunkt. Es gibt daher ein $\varepsilon > 0$ mit $\int_{\Omega} f \, d\nu \geq \varepsilon$ für alle $f \in G$.
Dann ist offenbar auch

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^m a_i f_i \, d\nu = \sum_{i=1}^m a_i \int_{\Omega} f_i \, d\nu \geq \sum_{i=1}^m a_i \varepsilon = \varepsilon$$

für alle $\sum_{i=1}^m a_i f_i \in C_1(G)$. Es folgt

$$\int_{\Omega} g \, d\nu = \lim \int_{\Omega} g_n \, d\nu \geq \varepsilon,$$

also $g \notin \bar{G}$.

II. Wir nehmen $\mu(\Omega) = 1$ an. Wegen $\bar{G} \neq \bar{G}$ und der Definition von τ_{μ}
existieren $b > 0$, $c > 0$ mit

$$\inf_G \mu\{\omega : \hat{f}(\omega) \geq c\} \geq b.$$

Wir werden zeigen, dass dann

$$\inf_{C_1(G)} \mu\{\omega : \hat{g}(\omega) \geq \frac{bc}{4}\} \geq \frac{b}{2}.$$

Sei also $g = \sum_{i=1}^n a_i f_i$ mit $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ und $a_i \geq 0$, $f_i \in G$ für $i = 1, \dots, n$.

Wir behaupten zunächst, o.B.d.A.

$$(*) \quad \inf_{1 \leq i \leq n} a_i \geq \frac{1}{2n}$$

annehmen zu können. Sei nämlich $a = \inf_{1 \leq i \leq n} a_i$. Offenbar darf man $a > 0$

voraussetzen. Indem man einige der f_i öfter vorkommen lässt und die
zugehörigen Koeffizienten verkleinert, lässt sich $a \leq a_i \leq 2a$ für
alle i erreichen. (Man ersetze z.B. $a_i f_i$ durch $[\frac{a_i}{a}]$ Terme der
Form $[\frac{a_i}{a}]^{-1} a_i f_i$: es ist $a \leq [\frac{a_i}{a}]^{-1} a_i \leq 2a$ und der Vektor g bleibt
ungeändert). Dann gilt für die neuen a'_i , n' :

$$2 n' \inf_{1 \leq i \leq n'} a_i' = 2 n' a \geq n' \sup_{1 \leq i \leq n'} a_i' \geq \sum_{i=1}^{n'} a_i' = \sum_{i=1}^n a_i = 1,$$

also (*).

Sei nun φ_1 die Indikatorfunktion der Menge $\{\omega: \hat{f}_1(\omega) \geq c\}$ und
 sei $\varphi := \sum_{i=1}^n \varphi_i$. Dann gilt

$$\begin{aligned} nb &\leq \sum_{i=1}^n \mu\{\omega: \hat{f}_i \geq c\} = \int_{\Omega} \varphi \, d\mu \\ &= \int_{\{\omega: \varphi(\omega) \leq \frac{nb}{2}\}} \varphi \, d\mu + \int_{\{\omega: \varphi(\omega) > \frac{nb}{2}\}} \varphi \, d\mu \\ &\leq \frac{nb}{2} \mu(\Omega) + \mu\{\omega: \varphi(\omega) > \frac{nb}{2}\} n, \end{aligned}$$

da φ nach Definition durch n beschränkt ist. Es folgt wegen $\mu(\Omega) = 1$

$$(**) \quad \mu\{\omega: \varphi(\omega) > \frac{nb}{2}\} \geq \frac{b}{2}.$$

Sei nun $\varphi(\omega) > \frac{nb}{2}$. Dann ist $\sum_{i=1}^n a_i \hat{f}_i(\omega) \geq \frac{nb}{2} c \inf_{1 \leq i \leq n} a_i$, also

wegen (*) $\sum_{i=1}^n a_i \hat{f}_i(\omega) \geq \frac{bc}{4}$. Mit (**) ergibt sich die behauptete

Beziehung. |

Um die Aussage von 4.19 zu verdeutlichen, bemerken wir noch die folgende Tatsache:

4.20 Satz: Sei (X, τ) ein topologischer Vektorverband, dessen Topologie durch eine Norm beschrieben werden kann. Dann sind äquivalent:

- i) Aus $G \subset X^+$ und $\sigma_X \notin \overline{G}$ folgt $\sigma_X \notin \overline{\sigma_1(G)}$.
- ii) Es gibt eine Norm auf X , welche τ induziert und auf X^+ additiv ist.

Beweis: Sei $\|\cdot\|$ eine Norm, welche τ induziert.

1. ii) $\implies$ i). Ist $\|\cdot\|$ additiv auf X^+ , so gilt für jede Teilmenge G von X^+ :

$$\begin{aligned} & \inf \{ \|x\| : x \in C_1(G) \} \\ &= \inf \left\{ \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| : x_i \in G, a_i \geq 0, \sum_{i=1}^n a_i = 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \|x_i\| : x_i \in G, a_i \geq 0, \sum_{i=1}^n a_i = 1 \right\} \\ &= \inf \{ \|x\| : x \in G \} . \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Bedingung i) sofort.

2. i) $\implies$ ii). Wegen Lemma 3.8 genügt es, die Existenz einer positiven reellen Zahl k zu beweisen mit $\sum_{i=1}^n \|x_i\| \leq k \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|$

für je endlich viele $x_1, \dots, x_n$ in X^+ . Existiert aber kein solches k , dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ Punkte $x_{n1}, \dots, x_{nn}$ in X^+ mit

$$\sum_{i=1}^n \|x_{ni}\| \geq n \left\| \sum_{i=1}^n x_{ni} \right\| .$$

Auf Grund einer ähnlichen Überlegung wie zu Beginn des 2. Beweises von 4.19 können wir

$$2 \geq \min_{1 \leq i \leq i_n} \|x_{ni}\| \geq \frac{1}{2} \max_{1 \leq i \leq i_n} \|x_{ni}\| \geq 1$$

annehmen. Sei $G := \{x_{ni}\}_{1 \leq i \leq i_n, n \in \mathbb{N}}$. Es ist $\sigma \notin \overline{G}$, aber

$$\left\| \sum_{i=1}^{i_n} \frac{1}{i_n} x_{ni} \right\| \leq \frac{1}{i_n} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i_n} \|x_{ni}\| \leq \frac{1}{n} \max_{1 \leq i \leq i_n} \|x_{ni}\| \leq \frac{4}{n} ,$$

also $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i_n} x_{ni} \xrightarrow{n} \sigma$, d.h. $\sigma \in \overline{C_1(G)}$. Dies widerspricht der Bedingung (i). |

§ 5. Anwendungen auf vektorwertige Zufallsfunktionen

In diesem Paragraphen zeigen wir, dass die ordnungstheoretischen Methoden auch auf Funktionen angewendet werden können, deren Wertebereich mit keiner Ordnung versehen ist. Dabei führt man alle Aussagen auf solche über reelle Funktionale zurück, welche auf diesen Räumen definiert sind.

Es handelt sich vor allem um Folgerungen aus einer (für abzählbare Indexmengen bekannten) Version der Satzes von Banach-Mazur-Orlicz. - Zuvor als einfaches Beispiel dafür, wie unsere früheren Resultate auf den Fall vektorwertiger messbarer Funktionen übertragen werden können, der folgende Satz ($(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ sei im Folgenden wieder ein fester Massraum):

5.1 Satz: (F, σ) sei ein metrisierbarer topologischer linearer Raum.

μ sei lokalisierbar mit der Endliche-Teilmenge-Eigenschaft. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \Omega \longrightarrow F$ $\mathfrak{A}$ -messbar (vgl. 0.3). Existiert für jede Nullfolge $(c_n)_n$ reeller Zahlen eine μ -Nullmenge $N \in \mathfrak{A}$ mit

$$c_n f_n(\omega) \xrightarrow[n]{\sigma} \sigma_F \quad \text{für } \omega \notin N,$$

dann ist $\{f_n(\omega)\}_n$ für μ -fast alle ω σ -beschränkt.

Beweis: F besitzt bezüglich σ eine abzählbare Nullumgebungsbasis $\{W_k\}_k$ aus abgeschlossenen und kreisförmigen Mengen. Für $k \in \mathbb{N}$, $x \in F$ sei $q_k(x) = \inf \{a \geq 0 : x \in aW_k\}$. Weil W_k abgeschlossen und kreisförmig ist, gilt

$$(*) \quad bW_k = \{x : q_k(x) \leq b\} \quad \text{für } b \in \mathbb{R}^+.$$

Wegen (*) ist $q_k \circ f_n$ für jedes n messbar. Weiter gilt für jede Nullfolge $(c_n)_n$ in $\mathbb{R}$

$$\lim_n c_n q_k \circ f_n(\omega) = \lim_n q_k(c_n f_n(\omega)) = 0 \quad \mu\text{-f.ü.}$$

Damit gilt auch: Ist $(\hat{h}_m)_m$ irgendeine Folge in $\{q_k \circ f_n\}_n$, d.h. deren Glieder gewisse $q_k \circ f_n$ sind, so ist

$$\lim_m c_m \hat{h}_m(\omega) = 0 \quad \mu\text{-f.ü.}$$

also $c_m \hat{h}_m \xrightarrow[m]{0} 0$ in $M(\mu)$. Da nun $M(\mu)$ nach 4.13 die Eigenschaft $\sigma\text{-}\mathcal{B}$ hat, gilt ausserhalb einer μ -Nullmenge N_k

$$\sup_n q_k \circ f_n(\omega) < \infty.$$

Es sei $N := \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$. Ist $\omega \notin N$, so wird $\{f_n(\omega)\}_n$ von allen W_k absorbiert, d.h. $\{f_n(\omega)\}_n$ ist σ -beschränkt. |

Im Rest dieses Paragraphen wollen wir zwei vereinfachende Annahmen machen:

a) Der Bildraum ist ein Banachraum $(F, \|\cdot\|_F)$.

b) $\mu(\Omega) < \infty$.

Die meisten Aussagen bleiben auch für Fréchet-Räume sinngemäss richtig, die Formulierung wird jedoch wesentlich umständlicher.

Für eine Erläuterung von b) vergleiche die Bemerkung 2 im Anschluss an Satz 5.3.

5.2 Definition: a) $M_F(\mu)$ sei der Vektorraum der μ -Äquivalenzklassen F -wertiger $\mathfrak{R}$ -messbarer Funktionen auf Ω .

b) Für $f \in M_F(\mu)$ bezeichnen wir mit $\|f\|_F$ die zu den Funktionen $\omega \mapsto \|f(\omega)\|_F$ gehörige Äquivalenzklasse in $M(\mu)$.

c) τ_{μ_F} sei die von der auf $M_F(\mu)$ durch

$$d_F(f, g) = \int_{\Omega} \frac{\|f - g\|_F}{1 + \|f - g\|_F} d\mu$$

definierten Metrik d_F induzierte Topologie auf $M_F(\mu)$.

d) Für $\mathcal{G}$ -messbares $\varphi: \Omega \rightarrow F$ bezeichnen wir das zugehörige Element von $M_F(\mu)$ mit $\tilde{\varphi}$.

Bemerkung zu c): Wie im reellen Fall ergibt sich, dass d_F vollständig ist und τ_{μ_F} eine lineare Topologie ist.

Wir beweisen nun eine Variante des Satzes 3.15 für lineare Operatoren mit Werten in $M_F(\mu)$.

5.3 Satz: $(E, \|\cdot\|_E)$ sei ein normierter Raum. $\{T_\gamma\}_\Gamma$ sei eine Menge stetiger linearer Abbildungen von E in $M_F(\mu)$, so dass

$$(1) \quad \{\|T_\gamma e\|_F\}_\Gamma \text{ in } M(\mu) \text{ o-beschränkt}$$

ist für alle $e \in E$.

a) Ist $(E, \|\cdot\|_E)$ ein Banach-Raum, so gibt es Konstanten $C(r)$ ($r > 0$) mit $C(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$, so dass gilt

$$(2) \quad \mu \{ \omega : \overbrace{(\sup_\Gamma \|T_\gamma e\|_F)}(\omega) \geq r \|e\|_E \} \leq C(r).$$

b) Ist Γ gerichtet und $T: E \rightarrow M_F(\mu)$ stetig, so folgt aus (2) die Abgeschlossenheit der Menge

$$\{ e \in E : \|T_\gamma e - T e\|_F \xrightarrow[\Gamma]{0} 0 \}.$$

Beweis: 1. Die Beziehung (2) besagt nichts anderes, als dass die Abbildung $\sup_{\Gamma} \|T_{\gamma} \cdot\|_F$ im Nullpunkt stetig ist: Ist $\sup_{\Gamma} \|T_{\gamma} \cdot\|_F$ im Nullpunkt stetig, so werden norm-beschränkte Mengen in E auf τ_{μ} -beschränkte Mengen in $M(\mu)$ abgebildet, was wegen 4.10 gerade die Bedingung (2) bedeutet. Umgekehrt folgt die Stetigkeit im Nullpunkt aus (2) trivialerweise.

2. Aus 4.4 und 1.15a folgt, dass $(M(\mu), \tau_{\mu})$ den Voraussetzungen von Satz 3.15 genügt. Da die Abbildungen $\|T_{\gamma} \cdot\|_F$ offenbar stetig und sublinear sind, ergibt 3.15a, dass auch $\sup_{\Gamma} \|T_{\gamma} \cdot\|_F$ stetig ist, falls $(E, \|\cdot\|_E)$ ein Banachraum ist. Nach Teil 1. dieses Beweises impliziert dies bereits die Behauptung a).

3. Aus (2) folgt wegen $\sup_{\Gamma} \|T_{\gamma} e - T e\|_F \leq \|Te\|_F + \sup_{\Gamma} \|T_{\gamma} e\|_F$, dass auch $\sup_{\Gamma} S_{\gamma}$ im Nullpunkt stetig ist, wobei

$$S_{\gamma}(e) = \|T_{\gamma} e - T e\|_F$$

sei. Nach 3.12b ist auch $\varprojlim_{\Gamma} S_{\gamma}$ stetig, also

$$\{ e \in E : \|T_{\gamma} e - T e\|_F \xrightarrow{0} 0 \} = \{ e : \varprojlim_{\Gamma} S_{\gamma}(e) = 0 \}$$

abgeschlossen in E . |

Bemerkungen: Die Voraussetzung (1) kann man wie bei Satz 5.1 ersetzen durch die Bedingung

$$\|c_n T_{\gamma_n} e\|_F \xrightarrow{0} 0 \text{ für alle } e,$$

wenn $c_n \rightarrow 0, \{\gamma_n\}_n \subset \Gamma$.

2. Die Voraussetzung $\mu(Q) < \infty$ ist in diesem Satz nicht nötig. Es genügt μ als lokalisierbar mit der Endliche-Teilmenge-Eigenschaft anzunehmen. Allerdings muss bei $\mu(Q) = \infty$ in ersichtlicher Weise

(2) abgeändert werden). Im allgemeinen hat man dann die Topologie der stochastischen Konvergenz und nicht (wie z.B. in [11], S.186) die Topologie der Konvergenz nach Mass zugrunde zu legen, da für die letztere die Skalarmultiplikation nicht stetig ist, so dass 3.15 nicht mehr anwendbar ist.

3. Der Satz 5.3 ist für abzählbares Γ als das wesentliche Hilfsmittel beim Beweis sehr allgemeiner Konvergenzsätze verwendet worden (vgl. z.B. [10] , S. 122f) Dabei wird direkt von der Voraussetzung (1) auf die Konklusion von Teil b) geschlossen, um dann eine Konvergenzaussage nur für eine dichte Teilmenge des Banachraums E beweisen zu müssen. In diesen wie auch den meisten anderen Anwendungen wird der tieferliegende Teil a) des Satzes jedoch eigentlich gar nicht verwendet, da beim Nachweis von (1) die Bedingung (2) gleich in Form sogenannter „maximaler Ungleichungen“ mitbewiesen wird. Teil a) ist jedoch dann sehr nützlich, wenn man die Existenz eines Gegenbeispiels für eine Konvergenzaussage zeigen will, denn dafür braucht man dann nur nachzuweisen, dass (2) verletzt ist.

5.4 Folgerung: $(E, \|\cdot\|_E)$ sei ein Banachraum. $(T_\alpha)_A$ sei eine abzählbare Familie stetiger linearer Abbildungen von E in $M_F(\mu)$, so dass für alle $e \in E$ gilt

$$\mu \{ \omega : \sup_A \|\widehat{T_\alpha e}(\omega)\|_F = \infty \} = 0 .$$

Dann ist die Menge

$$\tilde{E} := \{ e \in E : \{\widehat{T_\alpha e}(\omega)\}_A \text{ ist relativ } \|\cdot\|_F\text{-kompakt } \mu\text{-f.ü.} \}$$

abgeschlossen in E .

Beweis: 1. Wir fixieren für jedes e eine Repräsentantenauswahl

$(\widehat{T_\alpha e})_A$. Wegen der Vollständigkeit von $(F, \|\cdot\|_F)$ ist $e \in \widetilde{E}$ äquivalent zu der folgenden Bedingung:

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Zu } \varepsilon > 0 \text{ existiert eine } \mu\text{-Nullmenge } N_\varepsilon \in \mathcal{R}, \text{ so dass für jedes} \\ \omega \in \Omega - N_\varepsilon \text{ endlich viele } x_1, \dots, x_n \text{ in } F \text{ existieren mit} \\ \widehat{(T_\alpha e(\omega))}_A \subset \bigcup_{i=1}^n \{x : \|x - x_i\|_F < \varepsilon\}. \end{array} \right.$$

Denn sei $(*)$ erfüllt und $(\varepsilon_k)_k$ eine Nullfolge positiver Zahlen.

Dann ist für jedes $\omega \in \Omega - \bigcup_k N_{\varepsilon_k}$ die Menge $\{\widehat{T_\alpha e}(\omega)\}_A$ totalbeschränkt, also $\|\cdot\|_F$ -relativkompakt.

2. Seien nun $e_0 \in \widetilde{E}$ und $\varepsilon > 0$ gegeben.

Nach Satz 5.3a gilt für alle $e \in E$

$$\mu\{\omega : \sup_A \|\widehat{T_\alpha e}(\omega)\|_F \geq r \|e\|_E\} \leq C(r)$$

mit $C(r) \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} 0$. Zu $m \in \mathbb{N}$ können wir demnach ein $r_m > 0$ bestimmen mit

$$\mu\{\omega : \sup_A \|\widehat{T_\alpha e}(\omega)\|_F \geq r_m \|e\|_E\} \leq \frac{1}{m}$$

für alle $e \in E$. Zu e_0 gibt es ein $e_{m,\varepsilon} \in \widetilde{E}$ mit $\|e_{m,\varepsilon} - e_0\|_E < \frac{\varepsilon}{2r_m}$, also

$$(**) \quad \begin{aligned} & \mu\{\omega : \sup_A \|\widehat{T_\alpha e_{m,\varepsilon}}(\omega) - \widehat{T_\alpha e_0}(\omega)\|_F \geq \frac{\varepsilon}{2}\} \\ & \leq \mu\{\omega : \sup_A \|\widehat{T_\alpha (e_{m,\varepsilon} - e_0)}(\omega)\|_F \geq r_m \|e_{m,\varepsilon} - e_0\|_E\} \leq \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

Wegen $e_{m,\varepsilon} \in \widetilde{E}$ gibt es andererseits für μ -fast jedes ω endlich viele $x_1, \dots, x_n$ mit

$$(***) \quad \{\widehat{T_\alpha e_{m,\varepsilon}}(\omega)\}_A \subset \bigcup_{i=1}^n \{x : \|x - x_i\|_F < \frac{\varepsilon}{2}\}.$$

Wegen $(**)$ existiert eine Menge $N_{\varepsilon,m} \in \mathcal{R}$ mit $\mu(N_{\varepsilon,m}) < \frac{1}{m}$, so dass

für alle $\omega \in \Omega - N_{\varepsilon, m}$

$$\sup_A \|T_{\alpha} e_{m, \varepsilon}(\omega) - T_{\alpha} e_0(\omega)\|_F < \frac{\varepsilon}{2}$$

und daher wegen (***)

$$\{T_{\alpha} e_0(\omega)\}_A \subset \bigcup_{i=1}^n \{x : \|x - x_i\|_F < \varepsilon\}$$

ist.

Die Menge $N_{\varepsilon} := \bigcap_m N_{\varepsilon, m}$ erfüllt die Aussage von (*). Nach Teil 1. ist also $e_0 \in \tilde{E}$.

5.5 Satz: (Übertragungsprinzip)

T_{γ} ($\gamma \in \Gamma$), T_{∞} seien stetige lineare Operatoren von $L_F^1(\mu)$ in $M_F(\mu)$, so dass gilt

- i) $\{\|T_{\gamma} f\|_F\}_{\gamma}$ ist o-beschränkt in $M(\mu)$ für jedes $f \in L_F^1(\mu)$.
- ii) Es gibt stetige lineare Operatoren S_{γ} ($\gamma \in \Gamma$), S_{∞} von $L^1(\mu)$ in $M(\mu)$ mit $\textcircled{\alpha}$ $S_{\gamma} h \xrightarrow[\Gamma]{o} S_{\infty} h$ in $M(\mu)$ für alle $h \in L^1(\mu)$ und $\textcircled{\beta}$ Für jedes $\gamma \in \Gamma \cup \{\infty\}$, $x \in F$ und $h \in L^1(\mu)$ ist

$$T_{\gamma}(h \cdot x) = (S_{\gamma} h) \cdot x.$$

Dann gilt: Für jedes $f \in L_F^1(\mu)$ ist in $M(\mu)$

$$\|T_{\gamma} f - T_{\infty} f\|_F \xrightarrow[\Gamma]{o} 0.$$

Beweis: 1. Indem wir statt T_{γ} , S_{γ} die Operatoren $T_{\gamma} - T_{\infty}$, $S_{\gamma} - S_{\infty}$ betrachten, können wir $T_{\infty} = 0$ und $S_{\infty} = 0$ annehmen.

2. Aus der Bedingung ii) folgt

$$\|T_{\gamma} f\|_F = \|T_{\gamma}(h \cdot x)\|_F = \|(S_{\gamma} h) \cdot x\|_F = \|S_{\gamma} h\|_F \|x\|_F \xrightarrow[\Gamma]{o} 0$$

für alle $f \in L_F^1(\mu)$ der Gestalt $f = h \cdot x$. Damit erhalten wir

$\|T_{\gamma} f\|_F \xrightarrow[\Gamma]{o} 0$ für alle endlichen Linearkombinationen solcher Funk-

tionen, d.h. für alle $f \in L^1_F(\mu)$ mit „endlich-dimensionalem Wertebereich“. Da diese dicht in L^1_F liegen (vgl. 0.5) und es wegen Satz 5.3 genügt, die Konvergenzaussage für eine dichte Teilmenge des Banachraums $L^1_F(\mu)$ zu beweisen, folgt die Behauptung. |

Der vorangegangene Satz erlaubt es, z.B. den folgenden Satz ohne besondere Schwierigkeit aus seinem eindimensionalen Spezialfall herzuleiten (vgl. [11], S. 62f und S. 70 oben, wie üblich sei $\mathbb{R}^+ := [0, \infty)$).

5.6 Satz: $\vartheta: \mathbb{R}^+ \times \Omega \longrightarrow \Omega$ sei eine produktmessbare, stationäre μ -treue Strömung in Ω , d.h. es gelte

- a) $\vartheta^{-1}(\mathbb{R}) \subset B((\mathbb{R}_1 | \mathbb{R}^+) \times \mathbb{R})$
- b) $\vartheta(s+t, \omega) = \vartheta(s, \vartheta(t, \omega)) \quad (s, t \in \mathbb{R}^+, \omega \in \Omega)$
- c) $\mu(\vartheta(t, \cdot)^{-1}(K)) = \mu(K) \quad (K \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+).$

Dann gibt es zu jedem $\varphi \in \mathcal{L}^1_F(\mu)$ eine μ -Nullmenge $N \in \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

- i) Es ist für $\omega \notin N, t > 0$

$$\varphi(\vartheta(\cdot, \omega))|_{[0, t]} \in \mathcal{L}^1_F(\lambda|_{[0, t] \cap \mathbb{R}_1})$$

- ii) Für jedes $\omega \notin N$ existieren in der F -Norm die Limites

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(\vartheta(s, \omega)) \, ds$$

und

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(\vartheta(s, \omega)) \, ds.$$

Die wesentliche Idee des Beweises ist, dass man wegen

$$\left\| \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(\vartheta(s, \omega)) \, ds \right\|_F \leq \frac{1}{t} \int_0^t \|\varphi(\vartheta(s, \omega))\|_F \, ds$$

und der eindimensionalen Aussage (auf $\|\varphi\|_F$ angewendet) die Bedingung 1) aus 5.5 für die durch

$$\widehat{T_t \varphi}(\omega) = \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(\vartheta(s, \omega)) \, ds$$

definierbaren Operatoren T_t sofort erhält.

In 5.6 ist die Situation insofern besonders einfach, als die Auswahl der Repräsentanten kein Problem darstellt. Im Rest dieses Paragraphen wollen wir mit Hilfe des Satzes von Doob (vgl. 0.6S) einige Fälle angeben, in denen Existenzaussagen über „sympathische“ Repräsentantenauswahlen möglich sind.

5.7 Lemma: Sei (D, ρ) ein metrischer Raum. Es sei $R \subset \mathbb{R}$ und $r_0 = \sup R$. Es seien D -wertige $\mathbb{R}$ -messbare Funktionen φ, φ_r ($r \in R$) auf Ω gegeben, so dass für die Äquivalenzklassen in $M(\mu)$ gilt

$$\widetilde{\rho(\varphi_r, \varphi)} \xrightarrow[r \rightarrow r_0]{0} 0.$$

Dann gibt es zu jedem $r \in R$ eine $\mathbb{R}$ -messbare Funktion $\overset{\circ}{\varphi}_r : \Omega \longrightarrow D$ mit $\mu\{\omega : \varphi_r(\omega) \neq \overset{\circ}{\varphi}_r(\omega)\} = 0$, und so dass für alle $\omega \in \Omega$

$$\rho(\overset{\circ}{\varphi}_r(\omega), \varphi(\omega)) \xrightarrow[r \rightarrow r_0]{0} 0.$$

Beweis: Wir setzen $a_r(\omega) := \rho(\varphi_r(\omega), \varphi(\omega))$. Zu $(a_r)_R$ existiert nach 0.6S eine Familie $(a'_r)_R$, welche separabel ist und so dass $N_r := \{\omega : a_r(\omega) \neq a'_r(\omega)\}$ eine μ -Nullmenge ist für jedes $r \in R$. Sei $Q \subset R$ abzählbar und ein Separator für $(a'_r)_R$. Nach Voraussetzung gilt $\widetilde{a'_r} \xrightarrow[r \rightarrow r_0]{0} 0$, also, weil Q abzählbar ist,

$$a'_q(\omega) \xrightarrow[q \in \mathbb{Q}]{q \rightarrow r_0} 0$$

ausserhalb einer Nullmenge N . Weil $\mathbb{Q}$ separierend ist für $(a'_r)_R$, folgt

$$\lim_{r \rightarrow r_0} a'_r(\omega) = \lim_{\substack{q \rightarrow r_0 \\ q \in \mathbb{Q}}} a'_q(\omega) = 0$$

für $\omega \notin N$. Wir setzen

$$\overset{\circ}{\varphi}_r(\omega) := \begin{cases} \varphi_r(\omega) & \text{für } \omega \notin \text{NUN}_r \\ \varphi(\omega) & \text{für } \omega \in \text{NUN}_r \end{cases}.$$

Dann ist offenbar φ_r auch messbar. Weiter ist

$$\rho(\overset{\circ}{\varphi}_r(\omega), \varphi(\omega)) = \begin{cases} 0 & \text{für } \omega \in \text{NUN}_r \\ \rho(\varphi_r(\omega), \varphi(\omega)) = a_r(\omega) = a'_r(\omega) & \text{für } \omega \notin \text{NUN}_r \end{cases}.$$

Daraus ergibt sich die Behauptung. |

5.8 Folgerung: $(E, \|\cdot\|_E)$ sei ein Banachraum. Es sei $R \subset \mathbb{R}$ und $r_0 = \sup R$.

$(T_r)_R$ sei eine Familie stetiger linearer Abbildungen von E in $M_F(\mu)$ mit

- i) $\{\|T_r e\|_F\}_R$ ist 0 -beschränkt in $M(\mu)$ für alle $e \in E$.
- ii) $\|T_r e - T_{r'} e\|_F \xrightarrow[r', r' \rightarrow r_0]{r, r' \rightarrow r_0} 0$ für alle e aus einer dichten Teilmenge von E .

Dann existiert eine stetige lineare Abbildung $T : E \longrightarrow M_F(\mu)$

und zu jedem $e \in E$ eine Repräsentantenauswahl $(\widehat{T_r e})_R$ und $\widehat{T e}$ von $(T_r e)_R$ und $T e$, so dass für alle $\omega \in \mathbb{Q}$ gilt

$$\|\widehat{T_r e}(\omega) - \widehat{T e}(\omega)\|_F \xrightarrow[r \rightarrow r_0]{} 0.$$

Beweis: Sei $(r_n)_n$ eine Folge in R mit $r_n \xrightarrow{n} r_0$. Da nach Satz 5.3

für alle $e \in E$ $\|T_r e - T_{r_n} e\|_{F, r \rightarrow r_n} \xrightarrow{0} 0$ gilt, ist für jedes e und eine beliebige Repräsentantenauswahl $(\widehat{T_{r_n} e})_n$

$$\|\widehat{T_{r_n} e}(\omega) - \widehat{T_{r_m} e}(\omega)\|_F \xrightarrow{n, m} 0 \quad \mu\text{-f.ü.}$$

Weil F vollständig ist, gibt es also eine messbare Funktion $\varphi_e : \Omega \longrightarrow F$ mit

$$\|\widehat{T_{r_n} e}(\omega) - \varphi_e(\omega)\|_F \xrightarrow{n} 0 \quad \mu\text{-f.ü.}$$

Setzen wir $T e := \tilde{\varphi}_e$, so gilt $\|T_{r_n} e - T e\|_F \xrightarrow{0} 0$ und damit

$$\|T_r e - T e\|_F \leq \|T_r e - T_{r_n} e\|_F + \|T_{r_n} e - T e\|_F \xrightarrow{r, r_n \rightarrow r_n} 0.$$

Auf Grund von Lemma 5.7 gibt es also eine Repräsentantenauswahl $(\widehat{T_r e})_R$ mit

$$\|\widehat{T_r e}(\omega) - \varphi_e(\omega)\|_F \xrightarrow{r \rightarrow r_0} 0$$

für alle $\omega \in \Omega$.

Offenbar gilt $T_r e \longrightarrow T e$ auch bezüglich der Topologie τ_{μ_F} , so dass T als punktwieser Grenzwert einer gleichgradig stetigen Familie linearer Abbildungen selbst stetig und linear ist. |

5.9 Lemma: $(G, \|\cdot\|_G)$ sei ein separabler Banachraum mit dem Dualraum G' .

Es sei $R \subset \mathbb{R}$ und zu jedem $r \in R$ eine Funktion $\varphi_r : \Omega \longrightarrow G'$ gegeben.

Es gelte:

- i) Für alle $y \in G$, $r \in R$ ist $\langle y, \varphi_r(\cdot) \rangle$ $\mathbb{R}$ -messbar
- ii) $\{\|\tilde{\varphi}_r\|_{G'}\}_R$ ist σ -beschränkt in $M(\mu)$.

Dann existiert eine bezüglich der Topologie $\sigma(G', G)$ separable Familie $(\tilde{\varphi}_r)_R$ mit $\mu\{\omega : \varphi_r(\omega) \neq \tilde{\varphi}_r(\omega)\} = 0$ für alle $r \in R$.

Bemerkung zu den Voraussetzungen i) und ii): $\|\cdot\|_G$, sei wie üblich durch $\|x\|_G = \sup \{ \langle y, x \rangle : \|y\|_G \leq 1 \}$ erklärt. Weil G separabel ist, kann man hierbei auch $\|x\|_G = \sup_{G_0} \langle y, x \rangle$ schreiben, wobei G_0 eine abzählbare Teilmenge von $\{y : \|y\|_G \leq 1\}$ ist. Daher ist unter der Voraussetzung i) jedenfalls $\|\varphi_r(\cdot)\|_G$, messbar, also ii) sinnvoll.

Beweis zu 5.9: Sei g eine obere Schranke von $\{\|\tilde{\varphi}_r\|_{G'}\}_R$ in $M(\mu)$ und $\hat{g} \in g$. Dann gilt $\mu\{\omega : \|\varphi_r(\omega)\|_{G'} > \hat{g}(\omega)\} = 0$ für alle $r \in R$. Wir setzen

$$\varphi'_r(\omega) := \begin{cases} \varphi_r(\omega) & \text{falls } \|\varphi_r(\omega)\|_{G'} \leq \hat{g}(\omega) \\ 0_{G'} & \text{sonst.} \end{cases}$$

2. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $\Omega_k := \{\omega : k-1 \leq \hat{g}(\omega) < k\}$ und $Z_k := \{x \in G' : \|x\|_{G'} \leq k\}$. Offenbar ist $\varphi'_r(\Omega_k) \subset Z_k$ für alle $r \in R$. σ sei die Spur von $\sigma(G', G)$ auf Z_k . Bekanntlich (vgl. z.B. [9], S. 424 Th.2 und S. 426 Th. 1) ist (Z_k, σ) kompakt und metrisierbar. Weiter bilden die Mengen $\{x \in Z_k : \langle y, x \rangle < a\}$ ($a \in \mathbb{R}, y \in G$) ein Erzeugendensystem für die Borelschen Mengen von (Z_k, σ) , da ihre endlichen Durchschnitte eine Basis der Topologie σ darstellen. Aus Voraussetzung i) folgt daher, dass $\varphi'_r : (\Omega_k, \mathcal{Q}_k \cap \mathcal{R}) \longrightarrow (Z_k, \sigma)$ messbar ist für jedes r . Aus dem Satz von Doob (0.6S) erhalten wir eine Familie $(\overset{\circ}{\varphi}_{r,k})$ von messbaren Abbildungen $\overset{\circ}{\varphi}_{r,k} : \Omega_k \longrightarrow Z_k$ und eine abzählbare Teilmenge $\mathcal{Q}_k$ von R , so dass gilt:

a) $\mu\{\omega \in \Omega_k : \overset{\circ}{\varphi}_{r,k}(\omega) \neq \varphi'_r(\omega)\} = 0$ für $r \in R$

b) $\{(q, \overset{\circ}{\varphi}_{q,k}(\omega)) : q \in \mathcal{Q}_k\}$ ist dicht in $\{(r, \overset{\circ}{\varphi}_{r,k}(\omega)) : r \in R\}$ im Produktraum $R \times Z_k$ für jedes $\omega \in \Omega_k$.

3. Es ist $\Omega = \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k$. für $\omega \in \Omega$ setzen wir $\overset{\circ}{\varphi}_r(\omega) := \overset{\circ}{\varphi}_{r,k}(\omega)$, falls $\omega \in \Omega_k$ und $Q := \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$. Dann gilt:

A. $\{ \omega : \langle y, \overset{\circ}{\varphi}_r(\omega) \rangle < a \} = \sum_{k=1}^{\infty} \{ \omega \in \Omega_k : \langle y, \overset{\circ}{\varphi}_r(\omega) \rangle < a \} \in \mathcal{R}$
für $y \in G$, $r \in R$, $a \in \mathbb{R}$, d.h. $(\overset{\circ}{\varphi}_r)_R$ erfüllt ebenfalls i).

B. $\mu \{ \omega : \overset{\circ}{\varphi}_r(\omega) \neq \varphi_r(\omega) \} \leq \mu \{ \omega : \overset{\circ}{\varphi}_r(\omega) \neq \varphi'_r(\omega) \} + \mu \{ \omega : \varphi_r(\omega) \neq \varphi'_r(\omega) \}$
 $\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu \{ \omega \in \Omega_k : \overset{\circ}{\varphi}_{r,k}(\omega) \neq \varphi'_r(\omega) \} + 0$
 $= 0 + 0 = 0$.

C. Q ist abzählbar und für jedes $\omega \in \Omega$ gilt :

$\{ (q, \overset{\circ}{\varphi}_q(\omega)) : q \in Q \}$ ist dicht in $\{ (r, \overset{\circ}{\varphi}_r(\omega)) : r \in R \}$
im Produktraum $R \times \bigcup_k Z_k$, d.h. in $R \times G'$. |

Als Folgerung erhalten wir den folgenden Satz über Separabilität bezüglich der Normtopologie:

5.10 Satz: $(F, \|\cdot\|_F)$ sei separabel. $(T_r)_R$ mit $R \subset \mathbb{R}$ sei eine Familie stetiger linearer Abbildungen von einem Banachraum $(E, \|\cdot\|_E)$ in den Raum $M_F(\mu)$, so dass für alle abzählbaren Teilmengen Q von R gilt:¹⁾

i) $\mu \{ \omega : \sup_Q \|\widehat{T_Q e}(\omega)\|_F = \infty \} = 0$ für alle $e \in E$.

ii) Für alle e aus einer dichten Teilmenge von E ist die Menge $\{\widehat{T_Q e}(\omega)\}_Q$ relativ- $\|\cdot\|_F$ -kompakt für μ -fast alle $\omega \in \Omega$.

Dann existiert zu jedem $e \in E$ eine Repräsentantenauswahl $(\widehat{T_r e})_R$, welche separabel ist bezüglich der Normtopologie von F .

¹⁾ Man beachte wieder, dass es wegen der Abzählbarkeit der Q nicht auf die spezielle Wahl der Repräsentanten in i) und ii) ankommt.

Beweis: 1. Weil F separabel ist, gibt es einen separablen Banachraum G derart, dass F normisomorph ist zu einem Teilraum von G' ; in der Tat: Sei F_0 abzählbar und dicht in F . Zu $x \in F_0$ können wir nach dem Satz von Hahn-Banach ein $y_x \in F'$ wählen mit

$$\|y_x\|_{F'} = 1 \text{ und } \langle y_x, x \rangle = \|x\|_F.$$

Sei G die abgeschlossene lineare Hülle von $\{y_x : x \in F_0\}$. Die Abbildung $x \mapsto (y \mapsto \langle y, x \rangle)$ ist dann der gesuchte normtreue Isomorphismus. Wir können und werden daher im Rest des Beweises $F \subset G'$ annehmen.

2. Sei $e_0 \in E$ fest. Für $r \in R$ sei φ_r ein beliebiger Repräsentant von $T_r e_0$. Dann ist wegen der Norm-Messbarkeit von φ_r die Bedingung i) aus 5.9 erfüllt. Die dortige Bedingung ii) folgt aus der σ -Separabilität von $M(\mu)$, weil 5.10i) für alle abzählbaren $Q \subset R$ gilt. Nach 5.9 existiert eine Familie $(\hat{\varphi}_r)_R$ $\sigma(G', G)$ -messbarer Funktionen mit $\mu(\omega : \hat{\varphi}_r(\omega) \neq \varphi_r(\omega)) = 0$ für alle r und ein abzählbares $Q_0 \subset R$, so dass

$$(*) \quad \{(q, \hat{\varphi}_q(\omega))\}_{Q_0} \quad t \times \sigma(G', G)\text{-dicht in } \{(r, \hat{\varphi}_r(\omega))\}_R$$

ist, wobei t die gewöhnliche Topologie auf R ist. - Es sei

$$N_1 := \bigcup_{q \in Q_0} \{\omega : \hat{\varphi}_q(\omega) \neq \varphi_q(\omega)\}.$$

3. Aus den Voraussetzungen i) und ii) folgt mit 5.4 die Existenz einer μ -Nullmenge $N_2 \in \mathcal{R}$, so dass für $\omega \notin N_2$ der Normabschluss $K(\omega)$ der Menge $\{\hat{\varphi}_q(\omega)\}_{Q_0}$ kompakt ist. $\sigma(G', G)$ ist separiert und gröber als die Normtopologie $\tau_{\|\cdot\|}$. Also stimmen für $\omega \notin N_2$ auf $K(\omega)$ beide Topologien überein. Insbesondere ist $K(\omega)$ $\sigma(G', G)$ -kompakt und erst recht $\sigma(G', G)$ -abgeschlossen, so dass wegen (*)

$$(+)\quad \{\hat{\varphi}_r(\omega)\}_R \subset K(\omega) \quad \text{für alle } \omega \notin N_1 \cup N_2$$

ist. Die Gleichheit der beiden Topologien und (*) zeigen daher sogar:

$$(**)\quad \{(q, \hat{\varphi}_q(\omega))\}_{Q_0} \text{ ist } \tau_{\|\cdot\|}\text{-dicht in } \{(r, \hat{\varphi}_r(\omega))\}_R \text{ für } \omega \notin N_1 \cup N_2.$$

4. Wir setzen für $r \in R$

$$\widehat{T_r e_0}(\omega) := \begin{cases} \hat{\varphi}_r & \text{für } \omega \in N_1 \cup N_2 \\ \hat{\varphi}_r(\omega) & \text{für } \omega \notin N_1 \cup N_2 \end{cases}$$

Wegen (+) ist $\widehat{T_r e_0}(\Omega) \subset F$ und nach Definition der $\hat{\varphi}_r$ ist $\widehat{T_r e_0}$ $\sigma(G', G)$ -messbar. Weil F separabel ist, folgt daraus auch die Norm-messbarkeit von $\widehat{T_r e_0}$. (Wie auf S. 74 oben ergibt sich, weil G separabel ist, $(\widehat{T_r e_0})^{-1}(K) \in \mathcal{R}$ für jede Kugel K in F , und damit die Norm-messbarkeit, weil wegen der Separabilität von F die Kugeln die Borelschen Mengen von F erzeugen.) (**) liefert damit, dass $(\widehat{T_r e_0})_R$ eine $\tau_{\|\cdot\|}$ -separable Repräsentantenauswahl ist. |

Zum Abschluss sei die Verwendung der Sätze dieses § am Beispiel der Banachraum-wertigen Martingale illustriert:

Sei $((\varphi_\gamma, \mathcal{R}_\gamma))_\Gamma$ ein F -wertiges Martingal (vgl. 0.6) Dann ist $((\|\varphi_\gamma\|_F, \mathcal{R}_\gamma))$ ein positives Submartingal. Daraus folgt mit 0.6L

$$(1) \quad \mu\{\omega : \sup_{1 \leq i \leq n} \|\varphi_{\gamma_i}(\omega)\|_F \geq a\} \leq a^{-1} \sup_\Gamma \|\varphi_\gamma\|_1, \quad (a > 0)$$

falls Γ totalgeordnet und $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ beliebige Elemente von Γ sind.

Definiert man nun für $f \in L_F^1(\mu)$

$$T_\gamma f := E(f | \mathcal{R}_\gamma)$$

so ergibt sich aus (1), weil die T_γ positiv homogen sind,

$$\mu\{\omega : (\sup_{\Gamma} \|T_\gamma f\|_F)(\omega) \geq a\|f\|_1\} \leq a^{-1},$$

d.h. die Operatoren T_γ erfüllen die Bedingung (2) aus Satz 5.3.

Man kann nun entweder mit Hilfe des reellen Martingalkonvergenz-satzes und von 5.5 oder direkt aus 5.3b (wobei man verwendet, dass die f mit $T_\gamma f = f$ für ein γ dicht liegen in dem Raum $L_F^1(\mu|\mathfrak{R}_\infty)$ mit $\mathfrak{R}_\infty = B(\bigcup_{\Gamma} \mathfrak{R}_\gamma)$) auf den folgenden Satz schliessen:

$$(2) \begin{cases} \text{Aus (1) folgt für jedes } f \in L_F^1(\mu) \\ \|E(f|\mathfrak{R}_\gamma) - E(f|\mathfrak{R}_\infty)\|_F \xrightarrow[\Gamma]{o} 0 \quad \text{in } M(\mu). \end{cases}$$

Für $\Gamma = \mathbb{N}$ vgl. man z.B. Chatterji ([4], Th 4 und [5], Th 3) In der ersten Arbeit wird auch Teil a) von 5.3 benutzt, während in [5] der Beweis im wesentlichen eine spezielle Formulierung der Schlussweise darstellt, die wir für 5.3b verwendet haben.

Mit (2) ist aber zunächst nur eine Aussage für solche Martingale gewonnen, welche sich als die Familie der bedingten Erwartungen eines festen Elementes von $L_F^1(\mu)$ darstellen lassen. Dafür, dass der Konvergenzsatz für alle Martingale $((\varphi_n, \mathfrak{R}_n))_{\mathbb{N}}$ mit $\sup \|\varphi_n\|_1 < \infty$ gilt, ist in [5] folgende notwendige und hinreichende Bedingung angegeben worden:

$$(3) \begin{cases} \text{Zu jedem } \mu\text{-absolut-stetigen } F\text{-wertigen Mass } m: \mathfrak{R} \longrightarrow F \text{ mit} \\ \text{beschränkter Totalvariation existiert eine Radon-Nikodym-} \\ \text{Ableitung bezüglich } \mu. \end{cases}$$

Der Beweis, dass (3) für den allgemeinen Martingalkonvergenzsatz hinreicht, lässt sich auf alle Indexmengen Γ übertragen, für welche (1) und damit (2) gültig ist. Darunter sind u.a. diejenigen die der sogenannten „Vitali-Bedingung“ aus [15] genügen.

Schliesslich folgt aus 5.10 :

(4) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Zu jedem } F\text{-wertigen Martingal } (\varphi_r, \mathfrak{R}_r)_R \text{ mit } R \subset \mathbb{R} \text{ gibt es eine} \\ \text{bezüglich der Normtopologie separable Modifikation.} \end{array} \right.$

Beweis: 1. Sei $(r_n)_n$ eine Folge in R mit $r_n \uparrow \sup R$. Dann ist $R = \sum_{n=1}^{\infty} R \cap (r_n, r_{n+1}] + R \cap (-\infty, r_1]$. Es genügt, die Behauptung für jede der Mengen $R \cap (r_n, r_{n+1}]$ zu beweisen. Also o.B.d.A.

$s := \sup R \in R$.

2. Aus der Definition eines Martingals folgt

$$\mu\{\omega : \varphi_r(\omega) \notin F_s\} = 0$$

wobei F_s die abgeschlossene lineare Hülle von $\varphi_s(\Omega)$ sei. Also können wir o.B.d.A. F als separabel annehmen.

3. Für $f \in L^1_F(\mu)$, $r \in R$ sei $T_r f := E(f | \mathfrak{R}_r)$. Wegen (+) ist Voraussetzung 1) in 5.10 erfüllt, während ii) aus der Tatsache folgt, dass für die $f \in L^1_F(\mu)$ mit „endlich-dimensionalem Wertebereich“ die Mengen $\{\widehat{T_r f}(\omega)\}_{\omega} \mu$ -fast überall endlichdimensional und beschränkt, also relativkompakt sind. 5.10 liefert damit die Behauptung. |

(4) ist interessant, weil die folgende Verallgemeinerung eines bekannten „eindimensionalen“ Resultats gilt:

(5) $\left\{ \begin{array}{l} \mu\text{-fast alle Pfade } (\varphi_r(\omega))_R \text{ eines separablen } F\text{-wertigen Martingals} \\ \text{sind ohne Unstetigkeitsstellen zweiter Art auf } R \text{ (} R \subset \mathbb{R} \text{)}. \end{array} \right.$

Beweis: 1. Eine Funktion $\varphi: R \longrightarrow F$ heisst bekanntlich ohne Unstetigkeitsstellen zweiter Art, falls φ an jedem Punkt aus R rechts- und linksseitige Limites besitzt.

2. R ist Vereinigung einer aufsteigenden Folge von rechtsabgeschlossenen Mengen. Wir können und werden R daher selbst als rechtsabgeschlossen voraussetzen. Weiter nehmen wir o.B.d.A. wie oben an, dass F separabel und (vgl. den Beweis zu 5.10) im Dualraum G' eines separablen Banachraums G enthalten ist.

3. Sei Q der Separator von $(\varphi_r)_R$. Weil R rechtsabgeschlossen ist, kann man 5.4 anwenden, wonach eine Nullmenge $N \in \mathfrak{A}$ existiert, so dass für jedes $\omega \notin N$ die Menge $\{\varphi_q(\omega)\}_Q$ und damit auch die Menge $\{\varphi_r(\omega)\}_R$ relativ $\|\cdot\|_F$ -kompakt ist. Also besitzt $(\varphi_r(\omega))_R$ für jedes $r_0 \in R$ bei $r \uparrow r_0$ und bei $r \downarrow r_0$ je mindestens einen Norm-Häufungspunkt.

4. Sei G_0 abzählbar und dicht in G . Für $y \in G_0$ ist $(\langle y, \varphi_r(\cdot) \rangle)_R$ ein separables reellwertiges Martingal. Auf Grund des eindimensionalen Spezialfalls existiert daher eine μ -Nullmenge $N_y \in \mathfrak{A}$, so dass für alle $r_0, \omega \notin N_y$ die Grenzwerte

$$\lim_{r \uparrow r_0} \langle y, \varphi_r(\omega) \rangle \quad \text{und} \quad \lim_{r \downarrow r_0} \langle y, \varphi_r(\omega) \rangle$$

existieren. Weil G_0 dicht ist in G , kann für $\omega \notin \bigcup_{y \in G_0} N_y$ und $r_0 \in R$ also $(\varphi_r(\omega))_R$ bei $r \uparrow r_0$ und $r \downarrow r_0$ je höchstens einen Norm-Häufungspunkt haben.

5. Ist $\omega \notin \bigcup_{y \in G_0} N_y$, so hat $(\varphi_r(\omega))_R$ nach 3. und 4. keine Unstetigkeitsstellen zweiter Art auf R . |

Literaturverzeichnis

1. Bauer, H. : Einführung in die Theorie der Markoffschen Prozesse. Vorlesungsausarbeitung, Hamburg 1963.
2. Bauer, H. : Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Massentheorie. Berlin : de Gruyter 1968.
3. Bochner, S. : Integration von Funktionen, deren Werte die Elemente eines Vektorraums sind. Fund. Math. XX (1933) 262-276.
4. Chatterji, S.D. : A note on the convergence of Banach-space valued martingales. Math. Ann. 153 (1964) 142-149.
5. Chatterji, S.D. : Martingale convergence and the Radon-Nikodym theorem in Banach-spaces. Math. Scand. 22 (1968) 21-41.
6. Cogburn, R.G. : Conditional probability operators. Ann. Math. Stat. 33 (1962) 634-658.
7. Crofts, G. und Masterson, J.J. : Vector lattices and sequence spaces. Illinois Journal of Math. 16 (1972) 158-165.
8. Doob, J.L. : Stochastic Processes. New York : Wiley 1953.
9. Dunford, N. und Schwartz, J.T. : Linear Operators, Part 1. New York : Wiley 1964.
10. Ionescu Tulcea, A. und Ionescu Tulcea, C. : Abstract ergodic theorems. Trans. Am. Math. Soc. 107 (1963) 107-124.
11. Jacobs, K. : Neuere Methoden und Ergebnisse der Ergodentheorie. (Ergebnisse der Mathematik, Heft 29) Berlin u.a. : Springer 1960.
12. Kappos, D.A. : Zur mathematischen Begründung der Wahrscheinlichkeitslehre. Sitzungsberichte d. math.-nat. Klasse d. Bayerischen Akademie d. Wissenschaften 1948, 309-320.

13. Kappos, D.A. : Probability algebras and stochastic spaces.
New York u.a. : Academic Press 1969.
14. Krengel, U. : Über den Absolutbetrag stetiger linearer Operatoren und seine Anwendung auf ergodische Zerlegungen. Math. Scand. 13 (1963) 151-187.
15. Krickeberg, K. : Convergence of martingales with a directed index set. Trans. Am. Math. Soc. 83 (1956) 313-337.
16. May, W.D. und R. Rao Chivukula : Lattice properties of $\mathcal{L}(E, F)$. Duke Math. Journal 39 (1972) 345-350.
17. Noble, F. : The continuity of functions on cartesian products. Trans. Am. Math. Soc. 149 (1970) 187-197.
18. Peressini, A.L. : Ordered topogical vector spaces. New York u.a. Harper + Row 1967.
19. Schaefer, H.H. : Topological vektor spaces. New York u.a. : Macmillan 1966.
20. Starr, N. : Majorizing operators between L^p -spaces and an operator extension of Lebesgue's dominated convergence theorem. Math. Scand. 28 (1971) 91-104.

Liste verwendeter Symbole

Symbol		erklärt auf Seite
C_1	(konvexe Hülle)	5
$B + H$	(Vektorsumme)	5
$\mathcal{O}$	(Nullvektor)	5
$\mathcal{O}'$	(Nullabbildung)	29
X^+, Y^+	(positiver Kegel)	9
$\tilde{\mathbb{R}}$	(erweiterte Zahlengerade)	6
$\tilde{M}(\mu)$		44
$\mathcal{O}^* - \tau$	(Topologie der $\mathcal{O}^*$ -Konvergenz)	17f
τ_μ		47
τ_{μ_F}		65
$\leq$	(Ordnung in $\mathbb{R}$)	
$<$	(" in der Indexmenge)	5
$\leq$	(" in Vektorverbänden)	9
$\leq'$	(" für lin. Abbildungen)	29
$\hat{f}, \hat{g}, \hat{h}$		43
$\mathring{f}, \mathring{g}, \mathring{h}$		65

Stichwortverzeichnis

Zu jedem Begriff werden Stellen der Arbeit angeführt, an denen er eine wichtige Rolle spielt. Wird er an der ersten der angegebenen Stellen nicht erklärt, so wird er als bekannt vorausgesetzt. Zahlen in Klammern bezeichnen solche Stellen, an denen der betreffende Begriff selbst nicht explizit erwähnt wird, aber etwas mit ihm eng Verwandtes behandelt wird.

- | | |
|-----------------------------------|------------------------------------|
| Archimedisch 10ff,24,29,53 | Konvergenz |
| Bairesch 36ff | - , -fast überall 44 |
| Banach-Mazur-Orlicz, | - , nach Mass 44,55ff |
| Satz von 3, (38f), (65) | - , Ordnungs- 11ff44ff |
| Banach-Steinhaus, | - , o^* - 17,44ff |
| Satz von 36,41 | - , relativ gleichmässige 12,17,25 |
| bedingte Erwartung 8,78 | - , stochastische 47 |
| beschränkt (τ -) 14,50 | - , topologische 13 |
| ordnungs- 11ff,44 | |
| Beschränktheitseigenschaft | L-Raum (32),40, (61) |
| o- 14,52,63 | L^p -Räume 14,54 |
| τ - 14,40,50 | lokalisierbar 43 |
| Bochner-Integral 7,70ff | majorisierte Konvergenz, |
| | Satz von der 14,55,59 |
| Diagonaleigenschaft 17ff,44, | maximale Ungleichungen 67 |
| 49,54,56 | Martingal 8,77ff |
| Diskontinuum (Cantorsches) 6 | messbar, Messraum 5 |
| | monoton 11 |
| Endliche-Teilmenge-Eigenschaft 45 | |
| Familie 5 | Netz 5 |
| induktiver Limes 55 | Ordnung |
| Kakutani, Satz von 40 | - , lexikographische 11 |
| Köthe-Funktionen-Raum 51ff | - , kanonische 11,19 |
| | - Intervall 11 |

- ordnungs-, o-
- beschränkt
 - für Teilmengen von Vektorverbänden 11,44
 - für lineare Abbild. 29f,54
 - punktweise o-b. 34
- folgenstetig 29,54
- konvex 11,13
- separabel 10,13,26f,44
- vollständig 10,43
- $\mathcal{C}$ -vollständig 10,25,27
- positiv
- er Kegel 9
- e lineare Abbildung 29,54
- relativ kompakt f.ü. 67,79
- Repräsentant 43
 - enauswahl 71ff
- semikonvex 57f
- separable Familie messbarer Funktionen 5ff,71,73,75,79
- Separator 6
- Skalarmultiplikation 24,67
- solid 14
- stationäre Strömung 70
- subadditiv 30ff
- sublinear 30ff
- $\mathcal{T}$ -normal 13ff,27,33,35ff
- Topologie
 - , der Konvergenz nach Mass 47,67
 - der o^* -Konvergenz 18ff,47,49
 - der stochast. Konvergenz 47,49,67
 - lineare T. 24
 - homothetie-invariante T. 22
 - translations- " T. 22,33,35
 - spiegelungs- " T. 33,35
 - lokalkonvexe T. 16,37,40,57,59
 - semikonvexe T. 57f
- Ordnungstopologie
 - lineare O. 16,25,49
 - konvexe O. 16, 58
- tonnelliert 37
- Übertragungsprinzip 69
- Unstetigkeitsstellen zweiter Art 79
- Vektorverband 9ff
 - , topologischer 15f,18,25,44

Lebenslauf

Am 29. März 1947 wurde ich in Zürich (Schweiz) geboren als Sohn des Physikers Dr. Carl Friedrich von Weizsäcker und seiner Frau Gundalena, geb. Wille. Meine Kindheit und Schulzeit erlebte ich zunächst in Göttingen, dann in Hamburg. Am dortigen Johanneum machte ich 1966 das Abitur. Vom SS 1966 bis zum Vordiplom im SS 1968 studierte ich in Heidelberg Mathematik. Ich hörte vor allem bei S. Böge, Brandis, Krickeberg und Leptin. Das Akademische Jahr 1968/69 verbrachte ich unter Anleitung von G. E. H. Reuter an Imperial College in London. Im WS 1969/70 und im SS 1970 studierte ich an der Universität München bei Hämmerlin, Richter, Roelke und Schütte. Im Oktober legte ich hier die Prüfung des Hauptdiploms in Mathematik ab. Seit 1. November 1970 bin ich Verwalter einer Assistentenstelle am Mathematischen Institut der Universität.

